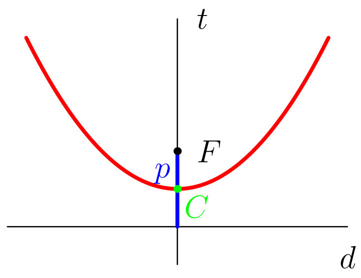
Kúpszeletek

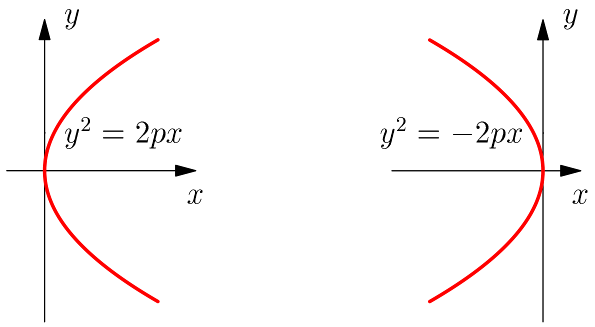
Parabola

Definíció Legyen adott az S síkban egy d egyenes és egy F pont, amely nem illeszkedik[1] a d egyenesre. Az S sík azon pontjainak halmazát, amelyek egyenlő távolságra helyezkednek el d-től és F-től, parabolának nevezzük.



A fenti definícióban szereplő d egyenest a parabola *vezéregyenesének* (direktrix), az F pontot pedig a parabola *fókuszpontjának* nevezzük.
A parabola szimmetrikus alakzat, szimmetriatengelyét az ábrán t-vel jelöltük. A parabola fókuszpontja mindig rajta van a parabola szimmetriatengelyén.
A vezéregyenes és a fókuszpont távolságát p-vel jelöljük. Ezt a távolságot szokás a parabola *paraméterének* nevezni.
A parabolának mindig pontosan egy pontja illeszkedik a szimmetriatengelyre. Ezt a pontot – amit az ábrán C-vel jelöltünk – a parabola *tengelypontjának* nevezzük.[2]

1. Igazoljuk, hogy ha a parabolát egy xy-koordinátarendszerbe helyezzük úgy, hogy tengelypontja az origó, szimmetriatengelye pedig az x-tengely, akkor a parabola egyenlete $y^2 = 2px$, illetve $y^2 = -2px$ attól függően, hogy a görbe az y-tengely által megadott melyik félsíkba esik![3]



2. Igazoljuk, hogy ha a parabolát egy xy-koordinátarendszerbe helyezzük úgy, hogy tengelypontja az origó, szimmetriatengelye pedig az y-tengely, akkor a parabola egyenlete $x^2 = 2py$, illetve $x^2 = -2py$ attól függően, hogy a görbe az x-tengely által megadott melyik félsíkba esik!

3. Határozza meg a következő parabolák fókuszpontját és írja fel a vezéregyeneseik egyenletét!

a) $y^2 = 2x$ **b)** $y^2 = 16x$ **c)** $x^2 = -4y$ **d)** $y = x^2$ **e)** $y = x^2 - 2x + 3$
f) $y^2 - 6y + x + 5 = 0$

---

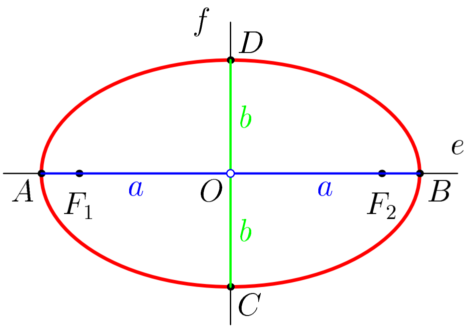
[1] Nincs rajta.
[2] Gyakran szokták – hibásan – a parabola csúcspontjának is nevezni.
[3] Parabola tengelyponti (kanonikus) egyenlete.

4. Adott néhány parabola vezéregyenese és fókusza. Írja fel a parabolák egyenletét!

a) $d\colon\ x = -1, \quad F\,(1, 0)$ **b)** $d\colon\ x = 2, \quad F\,(-2, 0)$
c) $d\colon\ x = 1, \quad F\,(5, 2)$ **d)** $d\colon\ y = -4, \quad F\,(0, 4)$
e) $d\colon\ y = 3, \quad F\,(0, -3)$ **f)** $d\colon\ y = 1, \quad F\,(3, -7)$

Ellipszis

Definíció Legyen adott az S síkban egy F_1 és egy F_2 pont (melyek egymástól különbözőek), továbbá legyen adott egy d távolság, amelyre $d > F_1F_2$. Az S sík azon P pontjainak halmazát, amelyekre $F_1P + F_2P = d$ (amelyek távolságösszege az F_1 és F_2 pontoktól d-vel egyenlő) ellipszisnek nevezzük.



A fenti definícióban szereplő F_1 és F_2 pontokat az ellipszis *fókuszpontjainak* nevezzük.
Az ellipszis tengelyesen szimmetrikus alakzat, két szimmetriatengelyét az ábrán e-vel, illetve f-fel jelöltük. A fókuszpontok az egyik szimmetriatengelyen (most e-n) helyezkednek el.
Az ellipszis középpontosan is szimmetrikus, szimmetriaközéppontja a szimmetriatengelyek metszéspontja, amit a rajzon O-val jelöltünk.

A szimmetriatengelyek ellipszisbe eső szakaszai közül a nagyobbikat az ellipszis *nagytengelyének*, a kisebbiket az ellipszis *kistengelyének* nevezzük. (Jelölésük az ábrán AB, illetve CD.)
A nagytengely hossza $2a$, azaz $OA = OB = a$, a kistengely hossza $2b$, tehát $OC = OD = b$.
A fókuszpontoknak a szimmetriaközépponttól való távolsága $OF_1 = OF_2 = c$.

1. Igazolja, hogy az ellipszis definíciójában szereplő d távolság megegyezik a nagytengely hosszával, azaz $d = 2a$.

2. Igazolja, hogy a fenti jelölésekkel $a^2 = b^2 + c^2$.

3. Igazolja, hogy ha az ellipszist úgy helyezzük egy Descartes-féle koordinátarendszerbe, hogy a szimmetriaközéppontja az origó, a nagytengelye az x-tengelyre esik (és ennek következtében a kistengelye az y-tengelyre esik), akkor az ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

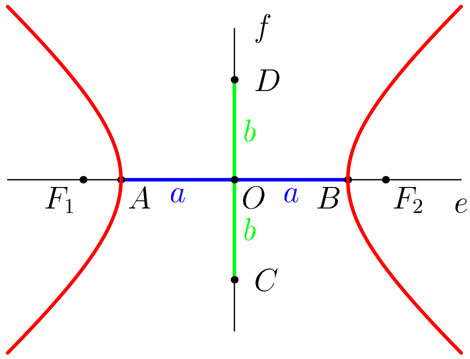
ahol a fentieknek megfelelően a a fél nagytengely, b pedig a fél kistengely hossza.

4. Írja fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek fókuszai $F_1\,(-3, 0)$, $F_2\,(3, 0)$ és nagytengelyének hossza 10.

5. Írja fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek fókuszai $F_1\,(-5, 0)$, $F_2\,(5, 0)$ és az ellipszis átmegy a $P\,(3, 4)$ ponton!

Hiperbola

Definíció Legyen adott az S síkban egy F_1 és egy F_2 pont (melyek egymástól különbözőek), továbbá legyen adott egy d távolság, amelyre $d < F_1F_2$. Az S sík azon P pontjainak halmazát, amelyekre $|F_1P - F_2P| = d$ (amelyek távolságkülönbsége az F_1 és F_2 pontoktól d-vel egyenlő) hiperbolának nevezzük.



A fenti definícióban szereplő F_1 és F_2 pontokat a hiperbola *fókuszpontjainak* nevezzük.
A hiperbola tengelyesen szimmetrikus alakzat, két szimmetriatengelyét az ábrán e-vel, illetve f-fel jelöltük. A fókuszpontok az egyik szimmetriatengelyen (most e-n) helyezkednek el.
Az ellipszis középpontosan is szimmetrikus, szimmetriaközéppontja a szimmetriatengelyek metszéspontja, amit a rajzon O-val jelöltünk.

Az ábrán AB-vel jelölt szakaszt a hiperbola *valós tengelyének* nevezzük. A valós tengely hossza $2a$, azaz $OA = OB = a$.
A fókuszpontoknak a szimmetriaközépponttól való távolsága $OF_1 = OF_2 = c$.
A $c$szakasszal mint átfogóval és az a szakasszal mint befogóval derékszögű háromszöget szerkeszthetünk ($c > a$), amelynek másik befogóját b-vel jelöljük ($c^2 = a^2 + b^2$). Ha b-t felmérjük az f egyenesre az O pontból kiindulva mindkét irányban, akkor az ún. *képzetes tengely* C és D végpontjaihoz jutunk.

1. Igazolja, hogy a hiperbola definíciójában szereplő d távolság megegyezik a valós tengely hosszával, azaz $d = 2a$.

2. Igazolja, hogy ha az hiperbolát úgy helyezzük egy Descartes-féle koordinátarendszerbe, hogy a szimmetriaközéppontja az origó, a valós tengelye az x-tengelyre esik (és ennek következtében a képzetes tengelye az y-tengelyre esik), akkor az hiperbola egyenlete:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
ahol a fentieknek megfelelően a a fél valós tengely, b pedig a fél képzetes tengely hossza.

3. Írja fel annak az hiperbolának az egyenletét, amelynek fókuszai $F_1\,(-5,0)$, $F_2\,(5,0)$ és valós tengelyének hossza 6.

4. Írja fel annak az hiperbolának az egyenletét, amelynek fókuszai $F_1\,(-4,0)$, $F_2\,(4,0)$ és a valós tengelyének egyik végpontja $B(3,0)$!