6.-7.hét: gyakorlati anyag

Ekvivalenciarelációk és parciális rendezési relációk

6. hét

Új fogalmak: homogén bináris relációk, tulajdonságok, halmazok partíciója, ekvivalencia-reláció, ekvivalencia-osztályok, faktorhalmaz.

Parciális rendezési reláció, parciálisan rendezett halmazok, korlátos részhalmaz, részhalmazok felső- ill. alsó határa, p.rendezett halmaz maximális-, minimális-, legnagyobb- és legkisebb eleme, Hasse diagram.

1. Adja meg az alábbi relációk néhány elemét, vizsgálja tulajdonságait hom. bin. relációk esetén. (reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás).

   a) $A = \{\text{tojás, tej, kukorica}\}$; $B = \{\text{tehén, tyúk, kecske}\}$.
   (A, B, R) halmazhármassal megadott R reláció legyen az alábbi: xRy, ha x terméke y-nak.

   b) R legyen értelmezve a Föld országainak halmazán; xRy, ha x szomszédos y országgal. (Szomszédos ország, ha van közös határuk. Egy ország saját magával nem szomszédos.)

   c) $(\mathbb{Z}; R)$, ahol xRy, ha x osztja y-t.

   d) $(E; \|)$, ahol E a síkbeli egyenesek halmaza. xRy, ha x párhuzamos y egyenessel.

   e) $(S_\triangle, R)$, ahol $S_\triangle$ a síkbeli háromszögek halmaza, xRy, ha x hasonló y háromszöggel.

   f) $(A; =)$ egyenlőségi reláció.

2. Legyen az $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Írja fel néhány partícióját, határozza meg a partíciók számát.

3. $S = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ Igazolja, hogy az S halmazon értelmezett R reláció ekvivalencia-reláció. Adja meg a reláció faktorhalmazát. (jel.: $S|_R$)

4. Igazoljuk, hogy az A halmazon értelmezett ekvivalencia-reláció faktorhalmaza az A halmaz egy partíciója. Azaz igazoljuk a következő állításokat:
   (Jelöljük $[a]$-val $a \in A$ az a elemmel relációban álló elemek halmazát (ekvivalencia-osztályt).)

   a) $a \in [a]$, minden $a \in A$,

   b) $[a] = [b]$ akkor és csak akkor, ha $(a, b) \in R$.

   c) ha $[a] \neq [b]$, akkor a két halmaz diszjunkt.

5. Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalencia-relációt alkotnak. Adja meg az ekvivalencia-osztályokat.

   a) $R = \{(m, n) \mid m + n \text{ páros szám}, \; m \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{Z}\}$

   b) $R = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \text{ osztható 2-vel}, \; x \in \mathbb{Z}, \; y \in \mathbb{Z}\right\}$

   c) $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ racionális}, \; a \in \mathbb{R}, \; b \in \mathbb{R}\}$

   d) $R = \{(x, y) \mid x - y \text{ osztható 3-mal}, \; x \in I_{12}, \; y \in I_{12}\}$[1]

   e) $R = \left\{(m, n) \mid m^2 - n^2 \text{ osztható 3-mal}, \; m \in \mathbb{N}, \; n \in \mathbb{N}\right\}$

   f) $R = \left\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \text{ osztható 4-gyel}, \; x \in \mathbb{N}, \; y \in \mathbb{N}\right\}$

   g) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$; $\quad (x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2)$, ha $x_1 y_1 = x_2 y_2$

7. hét

Új fogalmak : Háló, korlátos háló, részháló, izomorf hálók, disztributív háló, komplemens elemek hálóban, Boole algebra.

1. Mutassa meg, hogy az alábbi, $\preccurlyeq$-vel jelölt relációk parciális rendezési relációk:

   a) az I_4 halmaz legalább kételemű részhalmazainak halmazán $A \preccurlyeq B$, ha $A \subseteq B$;

[1] $I_n = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$

b) az I_4 halmaz legfeljebb kételemű részhalmazainak halmazán $A \preccurlyeq B$, ha $B \subseteq A$;

c) a $\{3, 6, 9, 10, 20, 30\}$ halmaz elemein $a \preccurlyeq b$, ha b osztható a-val;

d) az $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ halmaz elemein $a \preccurlyeq b$, ha b osztható a-val.

Készítse el a parciális rendezések Hasse-féle diagramjait. Mindegyik rendezésben állapítsa meg a maximális és minimális elemeket, illetve a legnagyobb és legkisebb elemeket, ha ilyen van. Van-e a fentiek között olyan, amelyben a halmaz bármely két a, b eleméhez tartozik $\inf(a, b)$, illetve $\sup(a, b)$?

2. Egy országban olyan úthálózat van, amelynek minden városa össze van kötve a fővárossal pontosan egy úttal úgy, hogy egy út akárhány városon átmehet. Két város szomszédos, hogyha az őket összekötő út nem érint másik várost. Adjunk meg a városok halmazán olyan (parciális) rendezést, melyben két város pontosan akkor van relációban egymással, ha közös országúton vannak.

3. Mutassa meg, hogy a természetes számok halmazán az oszthatósági reláció parciális rendezés. Mit tudunk mondani két elem szuprémumáról ill. infimumáról? Van-e legnagyobb ill. legkisebb elem, vannak-e maximális ill. minimális elemek?

4. Igazolja, hogy parciális rendezett halmaznak legnagyobb(legkisebb) elemeinek száma legfeljebb 1.

5. Igazolja, hogy, ha a parciális rendezett halmaz elemszáma véges, valamint a rendezés bármely két elemének van szuprémuma és infimuma, akkor van a halmaznak legnagyobb és legkisebb eleme.

6. $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Vizsgáljuk az $(A, lnko, lkkt)$ algebrát. Igazoljuk, hogy háló. Adjunk meg a hálón parciális rendezést. Igazoljuk, hogy a háló korlátos. Adjuk meg minden elem komplemensét, ha van.

7. Döntse el, hogy az alábbi parciális rendezett halmazok hálót alkotnak-e az inf és sup műveletekkel:

   a) a $\{3, 6, 9, 10, 20, 30\}$ halmaz elemein $a \preccurlyeq b$, ha b osztható a-val;

   b) az $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ halmaz elemein $a \preccurlyeq b$, ha b osztható a-val.

8. példatár 89.o. 4.4.5 feladat.

9. Igazolja, hogy a 4.4.5 b. feladat hálója nem disztributív.

10. $L = \{0, a, c, b, e, d, I\}$, az $(L; \preceq)$ parciálisan rendezett halmazban a legkisebb ill. legnagyobb elemek: 0 ill. I. A rákövetkező elemek: $0 \ll a$, $0 \ll b$, $a \ll c$, $b \ll c$, $a \ll d$, $b \ll e$, $d \ll I$,$c \ll I$ és $e \ll I$. Igazolja, hogy az (L, inf, sup) háló. Az alábbiak közül melyek részhálók:

    a) $L_1 = \{0, a, b, I\}$

    b) $L_2 = \{0, a, e, I\}$

    c) $L_3 = \{a, c, d, I\}$

    d) $L_4 = \{0, c, d, I\}$

11. Disztributív-e az előző feladatban szereplő háló? Komplementumos-e a háló?

12. Igazoljuk, hogy az $(L; \wedge, \vee)$ véges elemszámú háló korlátos. Írjuk fel a korlátos háló Iés 0 elemeket a háló többi elemének segítségével.

13. példatár: 4.4.6, 4.4.7, 4.4.8-as feladatok.