Gyakorló feladatok és gyakorlásra alkalmas források
Alkalmazott matematikából
(a 2. ZH anyagából)

1. Határozott integrál
Egyváltozós eset:
http://www.math.u-szeged.hu/~vajda/HM/INTEGRAL/node11.html
Kétvátozós:
Térfogat számítás, kettős integrál segítségével

$$z(x,y)=x^2+y^2$$
$$0 \le x \le 2 \qquad V=\int_0^2\int_0^3 \left(x^2+y^2\right)dydx$$
$$0 \le y \le 3$$

$$\int_0^2\int_0^3 \left(x^2+y^2\right)dydx=\int_0^2\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^3 dx=\int_0^2\left[3x^2+9\right]dx=$$
$$\left[x^3+9x\right]_0^2=(8+18)=26$$

További forrás (a tartomány függvényekkel határolt):
http://www.staff.city.ac.uk/o.s.kerr/ActSciCalculus/CalculusQ3.pdf

2. Sajátérték, sajátvektor
Feladat
$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{bmatrix}$$
Keressük meg azt az $\boldsymbol{x}=(x,y.z)$ vektort (vektorokat), amelyeket a mátrix-szal adott transzformáció megtart irányukban, azaz $Ax=lx$, amiből $Ax-lx=0$, azaz $(A-lI)x=0$.
Ha $\boldsymbol{x}$ nem zérusvektor, akkor:
$$\det(A-lI)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}2-l & -1 & 0\\ 0 & 1-l & 0\\ 3 & -1 & -1-l\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2-l)\cdot(1-l)\cdot(-1-l)=0$$
$\Rightarrow\ 2-l=0 \vee 1-l=0 \vee -1-l=0$
$\Rightarrow$ az A mátrix sajátértékei: $l_1=2, l_2=-1, l_3=1$.
Ha $l_1=2,$ akkor $Ax=2Ix$, azaz $(A-2I)x=0$
$$\begin{bmatrix}2-2 & -1 & 0\\ 0 & 1-2 & 0\\ 3 & -1 & -1-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$-y=0, 3x-y-3z=0$, azaz $y=0, x=z$.

tehát a sajátvektor $(t,0,t)$ alakú, például: $v_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$, normált alakja $\overline{v_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

Hasonló eljárással, ha

Ha $l_2 = -1$, akkor $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, normált alakja $\overline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ha $l_3 = 1$, akkor $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, normált alakja $\overline{v_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Vektoranalízis

http://193.6.55.19/letolt/HEFOP/Matematika_III_%28MANB313%29.pdf
http://193.224.52.231/public/stettner/Szigorlat/Vektoranalizis_folyamatmernokoknek.pdf

Egyváltozós (egyparaméteres) vektor-skalár függvények - alapfogalmak

Általában *t*-vel jelölt skalár változóhoz (fizikában ez leggyakrabban az idő), annak szóba jöhető értékeihez vektorokat rendelünk, azaz egy térbeli görbe pontjait egy *t* paraméter függvényében a görbe pontjainak helyvektorival adjuk meg:

$$r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

$r(t)$ derivált függvénye: $\dot{r}(t) = \dot{x}(t) \cdot \vec{i} + \dot{y}(t) \cdot \vec{j} + \dot{z}(t) \cdot \vec{k}$

Bebizonyítható, hogy $\dot{r}(t_0)$ az $r(t)$ vektorfüggvényhez rendelhető térgörbe érintővektora a t_0 -hoz tartozó P_0 pontban. Az hozzá tartozó egységvektor : $\dot{r}_e(t_0) = \frac{\dot{r}(t_0)}{|\dot{r}(t_0)|}$.

Az $\dot{r}(t_0)$ és $\ddot{r}(t_0)$ vektorok által kifeszített síkot a térgörbe **simuló síkjának** nevezzük az adott helyen. Ez a sík a normálisával jellemezhető, amelyet binormális vektornak ($\vec{m}$) nevezünk. Nyilván $\vec{m} = \dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)$, ennek egységvektora az ún. **binormális egységvektor** ($\vec{b}$), amelyet $\vec{b} = \frac{m}{|m|}$ alapján tudunk kiszámítani.

Az érintő és a binormális egységvektor mellett fontos szerepe van az ún. **főnormális** egységvektornak. Jele: $\vec{n}$, értéke definíció szerint $\vec{n} = \dot{r}_e(t_0) \times \vec{m}$, vagyis a három egységvektor egymásra merőleges (hasonlóan, mint **i**, **j**, **k**), és tulajdonképpen egy „koordináta rendszert" alkotnak; a rendszer neve **kísérő triéder**.

A síkgörbék görbületéhez hasonlóan értelmezhető a térgörbe görbülete (g) egy adott *P* pontban. Ez tulajdonképpen az érintővektor irányváltozásának mértékét jellemzi az ívhosszhoz viszonyítva.

A *g* kiszámítása: $g = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}$.

A síkgörbék simuló köréhez hasonlóan térgörbe egy pontjához is rendelhető simuló kör, amely a **simuló síkban** van. Ennek sugara $R = \frac{1}{g}$ *g*, főnormális egyenesen van.

Hogy egy térgörbe mennyire tér el egy adott hely környezetében a síkgörbétől azt az ún. **torzióval** (T) lehet jellemezni, amelynek nagysága $T = \frac{\left|\dot{r} \times \ddot{r}\right| \circ \dddot{r}}{\left|\dot{r} \times \ddot{r}\right|^2}$, , ahol a számláló vegyes-szorzat.

Kétparaméteres (kétváltozós) vektor-skalár függvények á alapfogalmak

Az $r(t)$ egyparaméteres vektor-skalár függvény térbeli derékszögű koordináta rendszerben térgörbét határoz meg.

Az $r(u,v)$ vektorfüggvényben két skalár paraméter (u,v) szerepel. A függvényt kétparaméteres (két skaláris változós) vektor-skalár függvénynek nevezzük.

Térbeli derékszögű koordináta rendszerben az $r(u,v)$ helyvektor x, y, z koordinátái is ezen skalár paraméterek függvényei, azaz $r(u,v) = x(u,v)\cdot \vec{i} + y(u,v)\cdot \vec{j} + z(u,v)\cdot \vec{k}$.

Az $r(u,v)$ helyvektor végpontjainak halmaza (a függvény grafikonja) általában felület.

Kétváltozós vektor-skalár függvények deriválása

Két parciális deriváltat definiálunk a differenciahányadosok határértékeként

$\frac{\partial r}{\partial u} = r_u', \frac{\partial r}{\partial v} = r_v'$, azaz

$$\frac{\partial r}{\partial u} = r_u' = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot \vec{k},$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = r_v' = \frac{\partial x}{\partial v}\cdot \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot \vec{k}.$$

Az $r_u'(u_0,v_0), r_v'(u_0,v_0)$ parciális differenciálhányadosok a felületre illeszkedő megfelelő térgörbék érintőjének irányvektorai. Ha a parciális deriváltak folytonosak, akkor a felület egy $r(u_0,v_0)$, helyvektorú pontjához tartozó összes érintője egy síkban van, amelyet a felület adott ponthoz (adott helyvektorhoz) tartozó **érintősíkjának** nevezzük.

Ezen érintősík normálisa $\vec{n}$, amely $\vec{n} = r_u' \times r_v'$-ből kiszámolható.

Jelölje R az érintősík tetszőleges pontját (futópontját), akkor az $r_0 = r(u_0,v_0)$ helyvektorhoz tartozó érintősík egyenlete

$(R - r_0) \circ \vec{n} = 0$.

Ha $R = x\cdot \vec{i} + y\cdot \vec{j} + z\cdot \vec{k}$, akkor a sík egyenlete determinánssal is számítható:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} = 0$$

Vektor-skalár és vektor-vektor függvények

Lásd a fent említett forrásban (gradiens, nabla, divergencia, rotáció), mostanra.

Integrálok számítása a vektorterekben (a vizsgára!).

4. Differenciálegyenletek

Forrás: http://rs1.szif.hu/~horvathz/Bevde/bevde.htm

Várható típusok:

Elsőrendű közönséges diff. egyenletetek

Az $y' = g(x)$ eset.

Az $y' = g(x)\cdot h(y)$ eset.

- Az $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ eset.
- Az $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ eset.
- (És persze azok kezdeti feltétellel adott esetei is!)

Másodrendű diff. egyenletek

- Lineáris állandó együtthatós (homogén és nem homogén)
- Az $y'' = q(x)$ eset.
- Az $F(y'', y', x) = 0$ eset.
- Az $F(y'', y', y) = 0$ eset.
- Az $F(y'', y) = 0$ eset.

(És persze azok kezdeti feltétellel adott esetei is!)

5. Laplace transzformációk

(inverz probléma, illetve alkalmazása a differenciálegyenletek megoldásánál)