Gyakorló feladatok és gyakorlásra alkalmas források
Alkalmazott matematikából
(az 1. ZH anyagából)

Függvénysorok

1. Határozza meg a következő hatványsorok konvergencia-tartományát! Vizsgálja meg a konvergenciát a tartomány végpontjaiban is!

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

(Megoldás: $D =]-1,1[$, $x=\pm 1$ esetében nem konvergens a kapott numerikus sor!)

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n^2+1)}x^n$

(Megoldás: $D=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, $x=\pm\frac{1}{2}$ esetében is konvergens a kapott numerikus sor!)

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$

(Megoldás: $D=\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$)

2. Fejtse Taylor sorba a következő függvényeket az adott x_0 pont környezetében!

a) $f(x)=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, x hatványai szerint, azaz x_0 =0.

(Megoldás: vegyék figyelembe, hogy $f(x)=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}$, és a két függvényt külön-külön írják fel sorba-fejtve!)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$

b) $f(x)=\sin x$, x hatványai szerint, azaz x_0 =0.

(Megoldás: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$)

c) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, (x+1) hatványai szerint, azaz x_0 = -1.

(Megoldás: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$, a konvergencia-tartomány $D=]-2,0[$)

3. Fejtse Fourier sorba a következő függvényeket! Először ábrázolja őket!

a) $f(x)=\frac{p}{2}$, ha $x\in[-p,p]$, és $f(x+k2p)=f(x)$, $k\in Z$.

(Megoldás: $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{np}{2}$)

b) $f(x)=|x|$, ha $x\in[-p,p]$, és $f(x+k2p)=f(x)$, $k\in Z$.

(Megoldás: $a_0=p$, $a_n=\begin{cases}0 & ha \quad n=2k\\ -\dfrac{4}{n^2p} & ha \quad n=2k+1\end{cases}$, $b_n=0$, azaz

$f(x)=|x|=\dfrac{p}{2}-\dfrac{4}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$)

c) $f(x)=x$, ha $x\in\left]-1,1\right[$, és $f(x+k2)=f(x)$, $k\in Z$.

4. a) határozza meg a következő függvények teljes differenciálját!

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x-y}$ ($df=\left(\dfrac{-y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy$)

$f(x,y)=x^y$ ($df=x^{y-1}(ydx+x\ln xdy)$)

b) Határozza meg a következő függvények szélsőértékeit, ha léteznek!

$f(x,y)=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$ ($f_{\max}=f(4,4)=15$)

További példák pl. a
http://www.uni-miskolc.hu/evml/database/downloads/ketvaltozos_fuggyveny_szelsoerteke.pdf
és a
http://www.math.bme.hu/~szilagyi/17_ketv_szelsoertek.pdf
honlapokon (utóbbiban a 9. oldalon feltételes szélsőérték-feladat).

5. Lineáris egyenletrendszerek, például a
http://www.math.klte.hu/~losi/jegyzet/eco/linearis.pdf,
honlapon, (elmélet, feladatok az utolsó oldalakon).

Oldjon meg 3×3-as egyenletrendszereket Gauss módszerrel, Crammer módszerrel és inverz Mátrix módszerrel (természetesen ez utóbbi két módszert csak akkor alkalmazza, ha ez lehetséges)!
Feladatok a
*rs1.szif.hu/~simonne/**Linearis%20egyenlet**ek.doc*
honlapon.

6. Komplex számok: műveletek és függvények, bevezetés.
Például a
digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/Komplex_BArna.doc
honlapon.

Cauchy-Riemann feltétel ellenőrzése
Bizonyítsuk be, hogy az $f(z)=\bar{z}$ és az $f(z)=z^2\cdot\bar{z}$ függvények nem differenciálhatóak!