ALKALMAZOTT MATEMATIKA
(előadásvázlat)
a Biztonságtechnikai mérnöki MSc szak
hallgatói részére
2008/2009 I. félév

Prof. Dr. Galántai Aurél egyetemi tanár
BMF NIK IMRI

2008. november 29.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Alapfogalmak ismétlése

1.1. Sorozatok

Definíció: *A természetes számok halmazának a valós számok halmazába való egyértelmű leképezését (szám)sorozatnak nevezzük:* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Legyen $a_n = \phi(n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. A sorozatot általában az értékkészletével adjuk meg: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vagy egyszerűen $\{a_n\}$.

Definíció: *Az* $\{a_n\}$ *sorozat korlátos, ha létezik* $K > 0$ *szám, hogy* $|a_n| \leq K$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Az* $\{a_n\}$ *sorozat alulról korlátos, ha létezik* $k_1 \in \mathbb{R}$ *szám, hogy* $a_n \geq k_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Az* $\{a_n\}$ *sorozat felülről korlátos, ha létezik* $k_2 \in \mathbb{R}$ *szám, hogy* $a_n \leq k_2$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Definíció: *Az* $\{a_n\}$ *sorozat konvergens és határértéke az* $a \in R$ *szám, ha minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz létezik olyan* $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ *szám, hogy*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Definíció (ekvivalens): *Az* $\{a_n\}$ *sorozat konvergens és határértéke az* $a \in \mathbb{R}$ *szám, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *számra a sorozatnak csak véges sok tagja esik az* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ *intervallumon kívülre.*

A határérték (ha létezik) egyértelmű. Jelölése: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_n a_n = a$, vagy $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

A konvergens sorozatok szükségképpen korlátosak is.

Konvergens sorozatokra vonatkozó műveleti szabályok:

Legyenek az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek. Ekkor az alábbi sorozatok is konvergensek és a jelzett határétékekhez tartanak:

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n \quad (c \text{ konstans}),$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \left(b_n \neq 0 \ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\right).$$

Definíció: *A $b \in \mathbb{R}$ szám az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja, ha bármely kis $\varepsilon > 0$ értékre a $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervallum a sorozat végtelen sok tagját tartalmazza.*

A konvergens sorozatoknak egy torlódási pontja van éspedig a határértékük. Egy sorozatnak több torlódási pontja is lehet (de nem kell, hogy ilyen legyen).

Példa: Az $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ $(n = 2k)$, $a_n = -1 - \frac{1}{n^2}$ $(n = 2k+1)$ sorozatnak két torlódási pontja van.

Definíció: *Az $\{a_n\}$ sorozat monoton növő, ha $a_n \le a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Az $\{a_n\}$ sorozat monoton csökkenő, ha $a_n \ge a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

A monoton növő sorozatok alulról korlátosak, a monoton csökkenők pedig felülről korlátosak.

Ha egy $\{a_n\}$ sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor konvergens (és határértéke a legkisebb felső korlátja).

Ha egy $\{a_n\}$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens (és határértéke a legnagyobb alsó korlátja).

Rendőrszabály: *Legyenek $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok úgy, hogy $a_n \le b_n \le c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ha $\{a_n\}$ és $\{c_n\}$ konvergens és $\lim_n a_n = \lim_n c_n$, akkor a $\{b_n\}$ sorozat is konvergál és $\lim_n b_n = \lim_n a_n = \lim_n c_n$.*

1.2. Valós függvények

Definíció: *Legyenek $A, B \subset R$ nemüres halmazok. Az A és B halmazok direkt szorzatán az*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\} \tag{1.1}$$

rendezett elempárokból álló halmazt értjük.

Definíció: *Egy tetszőleges $S \subset A \times B$ részhalmazt relációnak nevezünk. Az $a \in A$ és $b \in B$ elemek akkor és csak akkor állnak egymással S relációban (jelölés: aSb), ha $(a, b) \in S$.*

Definíció: *Az $S \subset A \times B$ reláció értelmezési tartományán a*

$$D(S) = \{a \mid \exists b \in B : (a, b) \in S\} \subset A \tag{1.2}$$

halmazt értjük.

Definíció: *Az $S \subset A \times B$ reláció értékkészletén az*

$$R(S) = \{b \mid \exists a \in A : (a, b) \in S\} \subset B \tag{1.3}$$

halmazt értjük.

Definíció: *Az $S \subset A \times B$ reláció értéke (metszete) az $a \in D(S)$ helyen:*

$$S(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in S\}. \tag{1.4}$$

Definíció: *Az $S \subset A \times B$ relációt függvénynek nevezzük, ha $S(a)$ egyelemű halmaz minden $a \in D(S)$ esetén.*

A függvény(reláció)t az $f : A \to B$ formában szokás megadni ($f \subset A \times B$ helyett), az $a \to f(a)$ hozzárendelési utasítással és a $D(f) \subset A$ értelmezési tartománnyal együtt. Egyváltozós valós függvények esetén, amikoris $A, B \subset \mathbb{R}$, akkor a függvény 2D grafikonja (gráfja), azaz az $(x, f(x))$ $(x \in D(f))$ értékek halmaza írja le a függvényt mint relációt.

A függvényt egy-egyértelműnek nevezzük, ha minden $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$. A függvény ráképező, ha $R(f) = B$, azaz B minden eleme előáll a $D(f)$ értelmezési tartomány valamely elemének képeként.

Ha az $f : A \to B$ függvény egy-egyértelmű és ráképező ($R(f) = B$), akkor értelmezhetjük a függvény $f^{-1} : B \to A$ inverzét:

$$\forall y \in B : \quad f^{-1}(y) := x \quad : f(x) = y. \tag{1.5}$$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *párosnak* nevezünk, ha

$$f(x) = f(-x) \quad (x \in D(f)). \tag{1.6}$$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *páratlannak* nevezünk, ha

$$f(-x) = -f(x) \quad (x \in D(f)). \tag{1.7}$$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *periódikusnak* nevezünk (a $T > 0$ periódussal), ha

$$f(x) = f(x+T) \quad (x \in D(f)). \tag{1.8}$$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *konvexnek* nevezünk az $I \in \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (x, y \in I). \tag{1.9}$$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *konkávnak* nevezünk az $I \in \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (x, y \in I). \tag{1.10}$$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *monoton növőnek* nevezünk az $I \in \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in I,\ x_1 \leq x_2). \tag{1.11}$$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *monoton csökkenőnek* nevezünk az $I \in \mathbb{R}$ intervallumon, ha

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in I,\ x_1 \leq x_2). \tag{1.12}$$

Az f függvény *szigorúan monoton növő* (*csökkenő*), ha $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) teljesül minden $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2$ esetén.

Definíció: *Az $x^* \in \mathcal{D}(f)$ pont az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény globális minimumhelye, ha*

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (x \in \mathcal{D}(f)) \tag{1.13}$$

és globális maximumhelye, ha

$$f(x^*) \geq f(x) \quad (x \in \mathcal{D}(f)). \tag{1.14}$$

Definíció: *Az $x^* \in \mathcal{D}(f)$ pont az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény lokális minimumhelye, ha létezik $\delta > 0$ szám, hogy*

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (x \in \mathcal{D}(f) \cap (x^* - \delta, x^* + \delta)) \tag{1.15}$$

és lokális maximumhelye, ha

$$f(x^*) \geq f(x) \quad (x \in \mathcal{D}(f) \cap (x^* - \delta, x^* + \delta)). \tag{1.16}$$

Definíció: *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban határértéke van és ez a határérték $A \in \mathbb{R}$, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*
(i) $\exists \delta^* > 0 : (x_0 - \delta^*) \cup (x_0, x_0 + \delta^*) \subset D(f)$,
(ii) $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|x - x_0| < \delta_0,\ x \neq x_0 \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{1.17}$$

A függvény határértéke (ha létezik) egyértelmű. A határérték jelölése: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, vagy $f(x) \to A$ $(x \to x_0)$.

Függvények határértékére vonatkozó műveleti szabályok:

Ha az $f : R \to R$ és $g : R \to R$ függvényeknek az $x_0 \in R$ pontban határértéke van, akkor igazak a következő összefüggések:

$$\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \to x_0} f(x) \quad (c \text{ konstans}),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \right).$$

Definíció: *Az $f : R \to R$ függvénynek a $+\infty$ $(-\infty)$ pontban véges határértéke van és ez a határérték A, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $x_0(\varepsilon) > 0$ $(x_0(\varepsilon) < 0)$ szám, hogy*

$$x \geq x_0(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (x \leq x_0(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Jelölés: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$, ill. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Definíció: *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban jobboldali határértéke van és ez a határérték $A \in \mathbb{R}$, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*
(i) $\exists \delta^* > 0 : (x_0, x_0 + \delta^*) \subset D(f)$,
(ii) $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, hogy

$$x_0 < x < x_0 + \delta_0 \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{1.18}$$

A függvény jobboldali határértéke (ha létezik) egyértelmű. A jobboldali határérték jelölése: $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$, vagy $f(x) \to A$ $(x \to x_0 + 0)$.

Definíció: *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban baloldali határértéke van és ez a határérték $A \in \mathbb{R}$, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

(i) $\exists \delta^* > 0 : (x_0 - \delta^*, x_0) \subset D(f)$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ *számhoz* $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, *hogy*

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{1.19}$$

A függvény baloldali határértéke (ha létezik) egyértelmű. A baloldali határérték jelölése: $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$, vagy $f(x) \to A$ $(x \to x_0 - 0)$.

Definíció: *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in R$ pontban folytonos, ha az x_0 pontban értelmezve van és itt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, akkor a $cf(x)$ (c konstans), $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ és $f(x)/g(x)$ $(g(x_0) \neq 0)$ függvények is folytonosak ugyanitt.

Definíció: *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 pontban nem folytonos, de létezik a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ határértéke. Ekkor f-nek megszüntethető szakadása van az x_0-helyen.*

Megszüntethető szakadás esetén a módosított

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f), x \neq x_0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

függvény már folytonos lesz az x_0 helyen.

Definíció: *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 pontban nem folytonos, de léteznek a $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = B$ határértékek és $A \neq B$. Ekkor f-nek szakadása (ugrása) van az x_0-helyen.*

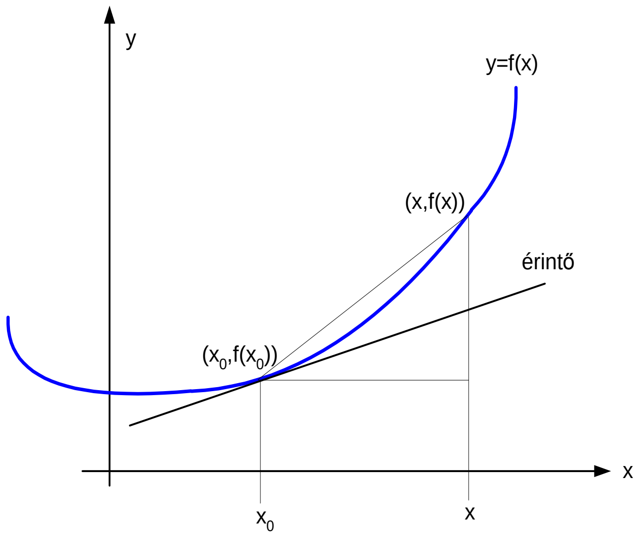
Az ugrás mértéke $|B - A|$.

1.3. Differenciálszámítás

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b) \subset D(f)$. A

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \in (a, b), x \neq x_0)$$

függvényt *differenciahányadosnak* nevezzük. A differenciahányados a függvény képének (gráfjának) két pontját, az $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontokat összekötő egyenes (szelő) iránytangense:



Definíció: *Az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $x_0\in D(f)$ *pontban, ha létezik a*

$$\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

határérték. Ezt a határértéket az $f(x)$ *függvény* x_0 *pontbeli differenciálhányadosának nevezzük. Szokásos jelölései:* $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Definíció: *Az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény jobbról differenciálható az* $x_0\in D(f)$ *pontban, ha létezik a*

$$\lim_{x\to x_0+0}\phi(x)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

határérték. Ezt a határértéket az $f(x)$ *függvény* x_0 *pontbeli jobboldali differenciálhányadosának nevezzük. Szokásos jelölései:* $f'_+(x_0)$, $f'(x_0+0)$.

Definíció: *Az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény balról differenciálható az* $x_0\in D(f)$ *pontban, ha létezik a*

$$\lim_{x\to x_0-0}\phi(x)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

határérték. Ezt a határértéket az $f(x)$ *függvény* x_0 *pontbeli baloldali differenciálhányadosának nevezzük. Szokásos jelölései:* $f'_-(x_0)$, $f'(x_0-0)$.

Deriválási szabályok:

Tegyük fel, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálhatók az $x_0\in\mathbb{R}$ pontban. Ekkor a cf, $f\pm g$, fg és f/g $(g(x_0)\neq 0)$ függvények is differenciálhatók az alábbiak szerint:

$$(cf(x))'|_{x=x_0}=cf'(x_0),$$

$$(f\pm g)'|_{x=x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0),$$

$$(fg)'|_{x=x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0),$$

$$(f/g)'|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \quad (g(x_0) \neq 0).$$

Ha f differenciálható a $g(x_0)$ helyen és g differenciálható az x_0 helyen, akkor az $f(g(x))$ összetett függvény differenciálható az x_0 helyen és

$$(f(g))'|_{x=x_0} = f'(g(x_0))\,g'(x_0).$$

Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható és szigorúan monoton az (a,b) intervallumon, és az x_0 pontban $f'(x_0)\neq 0$. Ekkor az f^{-1} inverz függvény differenciálható az $y_0 = f(x_0)$ pontban és

$$\left(f^{-1}\right)'|_{x=x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Az f függvény differenciálhányadosaival definiált f' függvényt az f deriváltfüggvényének nevezzük. Ha az f függvény f' deriváltfüggvénye differenciálható az x_0 pontban, akkor az $(f'(x))'|_{x=x_0}$ deriváltat az f függvény x_0 pontbeli második deriváltjának nevezzük.

Jelölése: $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$, $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, stb.

Hasonlóan definiáljuk a függvény n-edik deriváltját: $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'|_{x=x_0}$.

Ismertek a következő eredmények:

Tétel. *Ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható és x^* az f szélsőértékhelye, akkor $f'(x^*)=0$.*

Tétel. *Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható, $f'(x^*)=0$ és teljesül, hogy $f''(x^*)>0$ $(f''(x^*)<0)$, akkor x^* az f függvény minimumhelye (maximumhelye).*

Tétel: *Ha az f függvény deriváltjára az I intervallumon teljesül, hogy $f'(x)\geq 0$ $(x\in I)$, akkor itt f monoton növő.*

Tétel: *Ha az f függvény deriváltjára az I intervallumon teljesül, hogy $f'(x)>0$ $(x\in I)$, akkor itt f szigorúan monoton növő.*

Tétel: *Ha az f függvény deriváltjára az I intervallumon teljesül, hogy $f'(x)\leq 0$ $(x\in I)$, akkor itt f monoton csökkenő.*

Tétel: *Ha az f függvény deriváltjára az I intervallumon teljesül, hogy $f'(x)>0$ $(x\in I)$, akkor itt f szigorúan monoton csökkenő.*

Tétel: *Ha az f függvény második deriváltjára az I intervallumon teljesül, hogy $f''(x)\geq 0$ $(x\in I)$, akkor itt f konvex.*

Tétel: *Ha az f függvény második deriváltjára az I intervallumon teljesül, hogy $f''(x)\leq 0$ $(x\in I)$, akkor itt f konkáv.*

Ha az f függvény az x_0 ponttól jobbra konvex (konkáv), balra pedig konkáv (konvex), akkor az x_0 pontban inflexiós pontja van.

Ha például $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, de $f'''(x_0)\neq 0$, akkor x_0 inflexiós pont.

Középérték tételek:

Tétel *(Rolle): Ha f az $[a,b]$ intervallumban folytonos, az (a,b) nyílt intervalumban differenciálható és $f(a)=f(b)$, akkor van olyan $\xi\in(a,b)$ pont, hogy $f'(\xi)=0$.*

Tétel *(Lagrange): Ha f az $[a,b]$ intervallumban folytonos, az (a,b) nyílt intervalumban differenciálható, akkor van olyan $\xi\in(a,b)$ pont, hogy*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Tétel *(Cauchy): Ha f és g az $[a,b]$ intervallumon folytonos, (a,b)-n differenciálható, $g'(x) \neq 0$ minden $x \in (a,b)$-re, akkor van olyan $\xi \in (a,b)$ pont, hogy*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

1.4. Többváltozós valós függvények

Jelölje $\mathbb{R}^n$ az n komponensű

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

vektorok halmazát. Az egyszerűség kedvéért használni fogjuk az $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ jelölést is. Az $\mathbf{x}$ vektor hosszán az

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

számot értjük. A hosszfüggvény az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $|\mathbf{x}| \geq 0$, $|\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| \, |\mathbf{x}|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$,
3. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R})$.

A többváltozós valós függvények, olyan $f : A \to B$ típusú függvények, ahol $A \subset \mathbb{R}^n$ és $B \subset \mathbb{R}$. Tehát $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvények.

Definíció: *Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban határértéke van és ez a határérték $A \in \mathbb{R}$, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*
(i) $\exists \delta^* > 0 : \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta^*, \, \mathbf{x} \neq \mathbf{a}\} \subset D(f)$,
(ii) $\forall \varepsilon > 0$ *számhoz* $\exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, *hogy*

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta_0, \, \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon. \tag{1.20}$$

A függvény határértéke (ha létezik) egyértelmű. A határérték jelölése: $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(x) = A$, vagy $f(x) \to A$ $(\mathbf{x} \to \mathbf{a})$.

Többváltozós függvények határértékére ez egyváltozós függvényekkel analóg műveleti tételek vonatkoznak.

Definíció: *Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban folytonos, ha az $\mathbf{a}$ pontban értelmezve van és itt $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(x) = f(\mathbf{a})$.*

Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a $cf(\mathbf{x})$ (c konstans), $f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})$ és $f(\mathbf{x}) / g(\mathbf{x})$ $(g(\mathbf{a}) \neq 0)$ függvények is folytonosak ugyanitt.

Egy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($\delta > 0$ sugarú) környezetén az $\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt értjük.

Definíció: *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvény az* $a = [a_1, \ldots, a_n]^T \in \mathbb{R}^n$ *egy környezetében értelmezve. Az* f *függvény az* a *pontban differenciálható az* x_k *változó szerint, ha létezik különbségi hányados*

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{x_k - a_k} \tag{1.21}$$

határértéke. Ezt a határértéket az f *függvény* x_k *szerinti parciális deriváltjának nevezzük az* a *pontban. Jelölése:*

$$\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_k}, \quad f'_{x_k}(a_1, \ldots, a_n), \quad f'_{x_k}(\mathbf{a}). \tag{1.22}$$

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az x_k változója szerint differenciálható az $E \subset D(f) \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon. Az E halmazon ekkor definiálhatjuk az f'_{x_k} függvényt. Az f függvény kétszer parciálisan differenciálható (x_k, x_l szerint) az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha f'_{x_k} parciálisan deriválható x_l szerint az $\mathbf{a}$ pontban. Jelölése:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_l \partial x_k}, \quad f''_{x_k x_l}(\mathbf{a}). \tag{1.23}$$

Az r-edrendű parciális deriváltakat hasonlóan, teljes indukcióval értelmezhetjük:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right) = \frac{\partial^r f(\mathbf{a})}{\partial x_{i_r} \ldots \partial x_{i_1}} \quad \left(= f^{(r)}_{x_{i_r} \ldots x_{i_1}}(\mathbf{a}) \right). \tag{1.24}$$

Az f függvényt (teljesen) differenciálhatónak nevezzük az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha van az $\mathbf{a}$ pontnak egy olyan $\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\} \subset D(f)$ környezete, amelyben teljesül, hogy

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{a})(x_k - a_k) + r(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{a}|, \tag{1.25}$$

ahol $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} r(\mathbf{x}) = 0$. Az $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ különbség

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{a})(x_k - a_k) \tag{1.26}$$

lineáris részét az f függvény $\mathbf{a}$ pontbeli teljes differenciáljának nevezzük. Az

$$e(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{a})(x_k - a_k) \tag{1.27}$$

függvény az f függvény gráfjának $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pontbeli érintősíkja.

Ha egy f függvény folytonos és minden változója szerint parciálisan differenciálható az $\mathbf{a}$ pontban, akkor itt még nem szükségképpen teljesen differenciálható is.

Példa: Legyen

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{ha } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Ez folytonos $\mathbb{R}^2$-ben. $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ esetén

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Az $(x_1, x_2) = (0,0)$ helyen

$$f'_{x_1}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{f(x_1, 0) - f(0,0)}{x_1} = 0,$$
$$f'_{x_2}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{f(0, x_2) - f(0,0)}{x_2} = 0.$$

Tehát az f függvény parciálisan differenciálható x_1, ill. x_2 szerint $\mathbb{R}^2$-ben. Vegyük észre, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f'_{x_1}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Tehát f'_{x_1} nem folytonos a $(0,0)$ pontban. Emiatt az f nem lehet teljesen differenciálható a $(0,0)$ pontban, mert különben $x_1 = x_2 \to 0$ $(x_1 > 0)$ esetén fennállna

$$f(x_1, x_1) - f(0,0) = \frac{x_1}{2} = 0 \cdot (x_1 - 0) + 0 \cdot (x_2 - 0) + \sqrt{2} x_1 r(x_1, x_1),$$

ahol $r(x_1, x_1) \to 0$ $((x_1, x_1) \to (0,0))$ kellene, hogy teljesüljön. Ámde ez lehetetlen, mert a fenti egyenlőségből $r(x_1, x_2) = 1/\left(2\sqrt{2}\right)$, ami ellentmondás.

A teljes differenciál felfogható a függvény $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ megváltozásának lineáris közelítéseként.

Összetett függvény deriválási szabálya:

Tegyük fel, hogy $x_i = \phi_i(t)$, $a = \phi(t_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ekkor az összetett $f(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$ (már egyváltozós) függvény deriváltja a $t = t_0$ pontban:

$$\left(\frac{df(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))}{dt}\right)_{t=t_0} = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{a}) \phi'_k(t_0). \tag{1.28}$$

Alkalmazások:

1. Legyen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ adott (irány)vektor. Az f függvény $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ pontbeli $(\mathbf{v})$ *iránymenti deriváltján* a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, \ldots, a_n + tv_n) - f(\mathbf{a})}{t} \tag{1.29}$$

határértéket értjük, ha létezik. Jelölése: $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{v}}$.

Az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ponton átmenő $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ irányvektorú n-dimenziós egyenes egyparaméteres egyenlete $\mathbf{g}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ $(t \in \mathbb{R})$. Ha az f függvényt a $\mathbf{g}(t)$ egyenesre szűkitjük, akkor igaz, hogy

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)).$$

Tehát az összett függvény deriválási szabálya alapján

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{a})\, v_k. \tag{1.30}$$

2. **Implicit függvények differenciálása:** Az $y = f(x)$ függvényt az $F(x,y) = 0$ implicit összefüggés definiálja. Tegyük fel, hogy F parciális deriváltjai léteznek és $f(x)$ is differenciálható. Ekkor az összett függvény deriválási szabálya alapján:

$$F(x, f(x))' = F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))\, f'(x) = 0' = 0.$$

Ha fennáll, hogy $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, akkor

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Példa: $F(x,y) = x^3 + e^y = 0$. Ekkor tehát

$$F(x, f(x))' = \left(x^3 + e^{f(x)}\right)' = 3x^2 + e^{f(x)} f'(x) = 0,$$

ahonnan $f'(x) = -3x^2/e^{f(x)} = -3x^2/(-x^3) = 3/x$.

1.5. Integrálszámítás

Egy intervallumon differenciálható $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye, ha az intervallum minden x helyén

$$F'(x) = f(x).$$

Példa: $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$.

Ha F_1 és F_2 az f függvény két primitív függvénye, akkor csak állandóban különbözhetnek: $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek összességét valamely intervallumban az $f(x)$ függvény *határozatlan integráljának* nevezzük. Jele:

$$\int f(x)\, dx.$$

Ha F az f valamelyik primitív függvénye, akkor $\int f(x)\, dx = F_1(x) + C$.

Pl. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

A határozatlan integrál fontosabb tulajdonságai:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx,$$

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \quad (c \text{ konstans}),$$

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx,$$

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz.$$

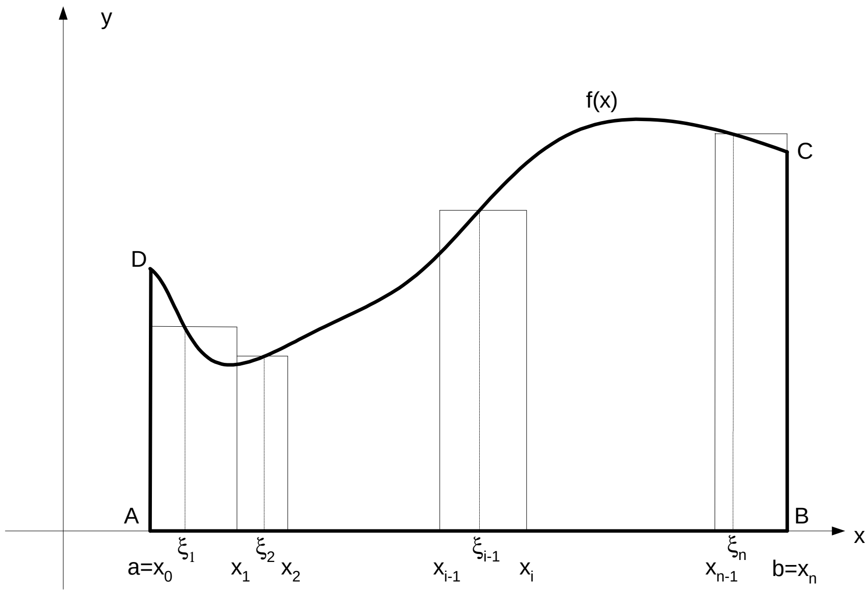
Legyen f az $[a,b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvény. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot osztópontokkal:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Legyen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tetszőleges pont. Az

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

számot *integrálközelítő* összegnek nevezzük. Ha feltesszük, hogy f folytonos és $f(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$, akkor s_n az ABCD tartomány "területét" közelíti:



Az f függvényt *Riemann-integrálhatónak* nevezzük az $[a,b]$ intervallumban, ha van olyan $I \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ értékhez létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy minden felosztásra, amelyre $\max_i (x_i - x_{i-1}) < \delta$, a ξ_i helyek megválasztásától függetlenül $|s_n - I| < \varepsilon$ teljesül. Az I számot az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett *határozott integráljának* nevezzük. Jelölése:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

A határozott integrál fontosabb tulajdonságai:

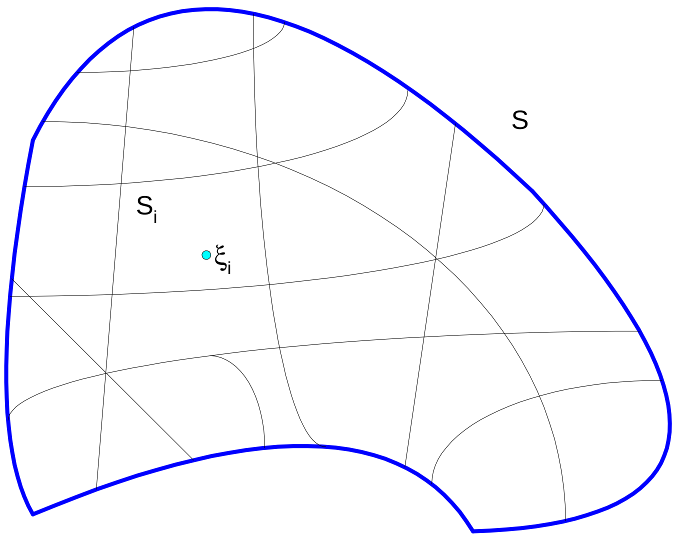
1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$,
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$,
3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$,
4. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (c konstans),
5. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

A határozatlan és határozott integrál közti kapcsolat, **Newton-Leibnitz tétele**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b.$$

Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ a sík korlátos, szakaszonként síma határú tartománya és $f : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Osszuk fel S-et szakaszonként síma görbékből álló hálózat segítségével véges számú (közös belső pontokkal nem bíró) S_i elemi tartományra ($i = 1, \ldots, n$).

Jelölje ΔS_i az S_i tartomány területét, $d(S_i)$ pedig az átmérőjét. Legyen továbbá $\xi_i = (x_i, y_i) \in S_i$ tetszőleges pont.



A felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i.$$

Ha $f \geq 0$ az S tartományon, akkor s_n térfogatot közelít.

Az $f(x,y)$ függvény Riemann-szerint integrálható az S tartományon és integrálja az I szám, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy minden olyan felosztáshoz, amelyre $\max_i d(S_i) < \delta$, a ξ_i pontok megválasztástól függetlenül $|s_n - I| < \varepsilon$ teljesül. Ezt az I számot az f függvény S tartományon vett kettős Riemann integráljának nevezzük. Jelölése:

$$I = \iint_S f(x,y)\,dS, \quad I = \iint_S f(x,y)\,dxdy.$$

Ha S un. normáltartomány, azaz $S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, akkor

$$\iint_S f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Legyen $V \subset \mathbb{R}^3$ a tér korlátos, szakaszonként síma határú tartománya és $f : V \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Osszuk fel V-et szakaszonként síma felületekből álló hálózat segítségével véges számú (közös belső pontokkal nem bíró) V_i elemi tartományra ($i = 1, \ldots, n$). Jelölje ΔV_i az V_i tartomány térfogatát, $d(V_i)$ pedig az átmérőjét. Legyen továbbá $\xi_i = (x_i, y_i, z_i) \in V_i$ tetszőleges pont.

A felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i.$$

Az $f(x, y, z)$ függvény Riemann-szerint integrálható a V tartományon és integrálja az I szám, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy minden olyan felosztáshoz, amelyre $\max_i d(S_i) < \delta$, a ξ_i pontok megválasztástól függetlenül $|s_n - I| < \varepsilon$ teljesül. Ezt az I számot az f függvény V tartományon vett hármasintegráljának (térfogatintegrál) nevezzük. Jelölése:

$$I = \iiint_V f(x, y, z)\, dV, \quad I = \iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Ha V un. hengerszerű test, azaz

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in S,\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

akkor

$$\iiint_V f(x, y)\, dxdy = \iint_S \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy.$$

1.6. Végtelen sorok

Legyen $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tetszőleges valsó számsorozat. A

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots$$

végtelen soron az $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \ldots$ sorozat határértékét értjük, ha az létezik. Ekkor azt mondjuk, hogy a végtelen sor konvergens és

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Ha a sor nem konvergál (véges határértékhez), akkor a sort divergensnek nevezzük.
Példa: A $\sum_{i=1}^{\infty} aq^{i-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{i-1} + \cdots$ végtelen geometria sor konvergens, ha $|q| < 1$ és $\sum_{i=1}^{\infty} aq^{i-1} = a/(1-q)$.
Példa: A $\sum_{i=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$ sor divergens, mert $s_n = n \to \infty$.

Majorálási kritérium: Ha a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ $(a_i \geq 0)$ és$\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ $(b_i \geq 0)$ végtelen sorokra teljesül, hogy $a_i \leq b_i$ $(\forall i)$ és $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergens, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ is konvergens.

Cauchy-kritérium: Ha létezik n_0 természetes szám, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ $(a_i > 0)$ vágtelen sor tagjaira teljesül $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ $(n \geq n_0)$, akkor a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens. Ha $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ $(n \geq n_0)$, akkor a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor divergens.

Leibniz-kritérium: Ha a

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} c_i = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{i-1} c_i + \cdots \qquad (c_i > 0)$$

váltakozó előjelű sor tagjaira $c_i \geq c_{i+1}$ és $\lim_{i\to\infty} c_i = 0$, akkora sor konvergens.
Definíció: *Az $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sort abszolut konvergensnek nevezzük, ha az $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ sor konvergens.*

Az abszolut konvergens sor konvergenciája a $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ sor konvergenciájából következik.

Az abszolut konvergens sor tagjai átrendezhetők. Az átrendezés nem változtatja a konvergencia jellegét és a sor összegét.

Ha egy sor nem abszolut konvergens, akkor az átrendezés megváltoztathatja a sor összegét.

1.7. Függvénysorok

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Az $f_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ függvények halmazát függvénysorozatnak nevezzük. Jelölése: $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, vagy $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$. A függvénysorozat konvergencia tartományának nevezzük azon $x \in I$ pontoknak a halmazát, amelyekben az $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ számsorozat valamely véges határértékhez konvergál. A konvergencia tartomány pontjaiban értelmezhetjük az

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

függvényt, amelyet a sorozat határfüggvényének nevezünk.

Az $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ függvénysorozatból képezett

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_i(x) + \cdots$$

végtelen sort függvénysornak nevezzük. Ez konvergens (az x pontban), ha az $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ sorozat konvergens és

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

A függvénysor divergens (az x pontban), ha itt nem konvergens.

Példa: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix$.

Ha $f_i(x) = a_i (x - x_0)^i$ $(\forall i)$, akkor a függvénysort (x_0 körüli) hatványsornak nevezzük:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_i (x - x_0)^i + \cdots .$$

A fenti sor az $y = x - x_0$ helyettesítéssel a 0 körüli

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i y^i = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_i y^i + \cdots$$

hatványsorba vihetjük át.

Cauchy-Hadamard-tétel: *A* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i y^i$ *hatványsor konvergens az* $|y| < r$ *pontokban, ahol*

$$r = \frac{1}{\lim_n \sup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2. fejezet

Komplex számok és függvények

2.1. Komplex számok és műveleteik

A $z = a + bi$ alakú számok halmazát, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és i-t a $\sqrt{-1}$ szimbólummal azonosítjuk, komplex számoknak nevezzük. A $z = a + bi$ alakot a komplex szám *algebrai alakjának* is nevezzük.

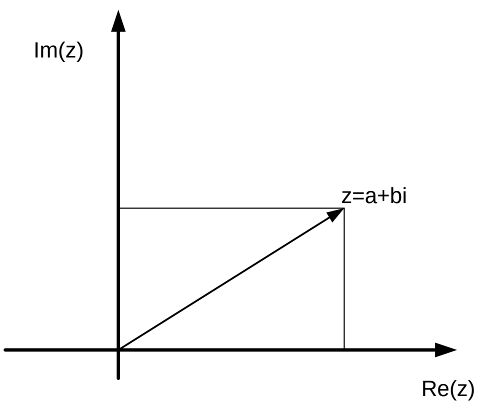
A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$-vel jelöljük. Tehát

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ha $z = a + bi$, akkor $a = \mathrm{Re}(z)$ a z komplex szám valós része, $b = \mathrm{Im}(z)$ pedig a komplex szám képzetes része. Szokásos a $z = a + ib$ jelölés is.

Vegyük észre, hogy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

A komplex számokat 2D ortogonális koordináta rendszerben ábrázoljuk, ahol a vízszintes tengely a komplex számok valós részének, a függőleges tengely pedig a komplex számok képzetes részének felel meg.



Komplex számokkal végezhető műveletek: $z = a + bi$, $w = c + di$

1. Összeadás:
$$z + w = (a + c) + (b + d)\, i$$
2. Kivonás:
$$z - w = (a - c) + (b - d)\, i$$
3. Szorzás:
$$\lambda z = z\lambda = (\lambda a) + (\lambda b)\, i \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$
$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$
4. Konjugálás:
$$\overline{z} = a - bi$$
5. Osztás ($w \neq 0$):
$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \end{aligned}$$

A konjugálás tulajdonságai: $z, w \in \mathbb{C}$,
$$\overline{(\overline{z})} = z, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{(zw)} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$
Ha $z \in \mathbb{R}$, azaz $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, akkor $\overline{z} = z$.

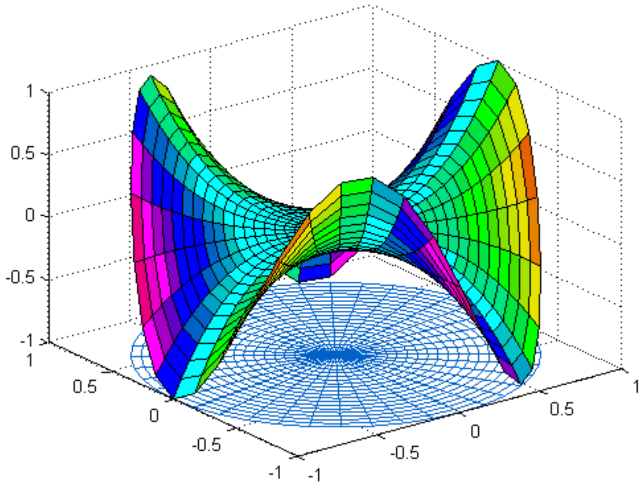
A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ komplex szám abszolutértékén (hosszán, modulusán) a
$$|z| = \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$$
számot értjük. Az abszolutérték tulajdonságai:
1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
2. $|zw| = |z|\,|w|$,
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

A komplex számokat 2D koordináta rendszerben vektorként ábrázolva megadhatjuk az un. *trigonometrikus alakjukat* is. Eszerint
$$z = a + bi = r\,(\cos\phi + i \sin\phi)\,,$$
ahol $r = |z|$ a komplex szám (vektor) hossza, $0 \leq \phi < 2\pi$ pedig a valós tengely ($\mathrm{Re}\,(z)$) és a (komplex) vektor között bezárt pozitív irányú szög. A ϕ szöget a z komplex szám argumentumának is hívják. Jelölése: $\arg z$.

Ha $z = a + bi$, akkor
$$\phi = \arg z = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, & \text{ha } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi, & \text{ha } a < 0 \text{ és } b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi, & \text{ha } a < 0 \text{ és } b < 0. \end{cases}$$

Komplex számok hatványozása: $n \geq 1$ egész szám,

$$\begin{aligned} z^n &= \overbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}^{n} \\ &= r^n \left(\cos n\phi + i \sin n\phi\right). \end{aligned}$$

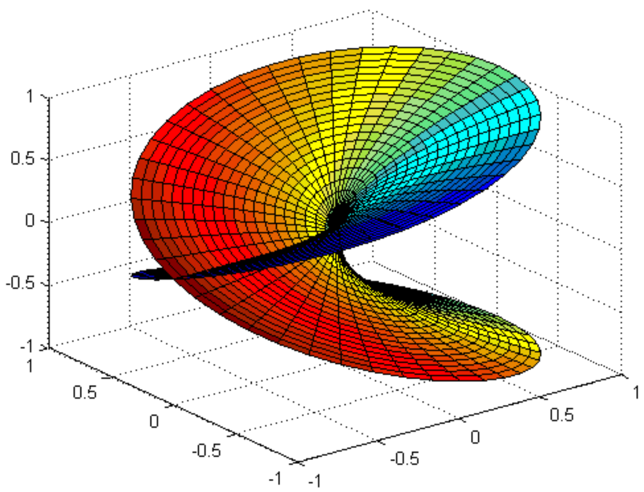


A z^3 függvény

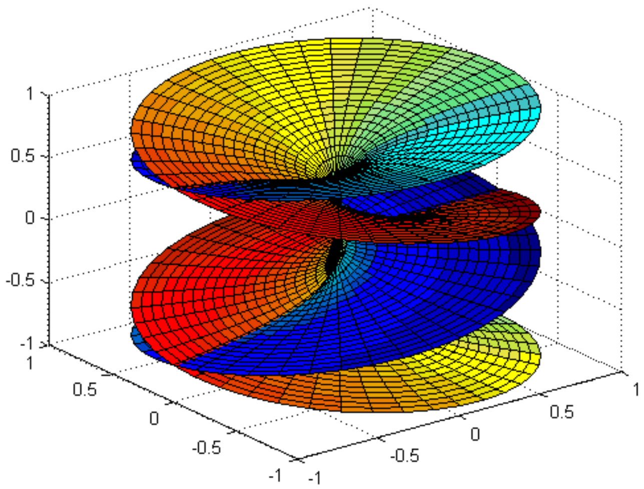
Komplex számok gyökvonása: $n \geq 1$ egész szám,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

A komplex gyökvonás n-értékű művelet!



Komplex négyzetgyök



Komplex 4-ik gyök

Megjegyzés: A z^3 függvénynél megfigyelt maximumok megfelelnek az 1 szám 3-ik gyökeinek.

2.2. Komplex függvények

A $z_0 \in \mathbb{C}$ pont $\delta > 0$ sugarú környezetén az

$$U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$$

nyílt körlemezt értjük (másképpen: a $|z - z_0| < \delta$ egyenltőtlenséget kielégítő komplex számok halmazát).

Legyen $H \subseteq \mathbb{C}$ nemüres halmaz. A $z_0 \in \mathbb{C}$ pont a H halmaz torlódási pontja, ha bármely kis $\delta > 0$ esetén az $U_\delta(z_0)$ környezetben a H halmaznak végtelen sok pontja van.

Megjegyzés: z_0 nem kell, hogy eleme legyen a H halmaznak.

A $H \subseteq \mathbb{C}$ halmazt zártnak nevezzük, ha H tartalmazza az összes torlódási pontját.

A $z_0 \in H$ pontot a H halmaz belső pontjának nevezzük, ha létezik $\delta > 0$, hogy $U_\delta(z_0) \subseteq H$.

A H halmazt nyíltnak nevezzük, ha minden pontja belső pont.

A H halmazt összefüggőnek nevezzük, ha bármely két pontja összeköthető egy törött vonallal, amely teljes egészében a H halmaz belsejében van.

A H halmazt tartománynak nevezzük, ha H összefüggő nyílt halmaz.

Példa: A $|z| < 3$, illetve a $|z| > 3$ feltételt kielégítő komplex számok tartományokat alkotnak. A $|z| = 3$ zárt körlemez nem tartomány.

A $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ komplex számsorozat konvergens, ha létezik $z \in \mathbb{C}$, hogy $|z_n - z| \to 0$ midőn $n \to \infty$.

Jelölések: $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, $z_n \to z$ $(n \to \infty)$.

Legyen $H \subseteq \mathbb{C}$ tetszőleges. A H halmazon értelmezett komplex értékű függvényeket komplex függvényeknek hívjuk. Ha $w = f(z)$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, akkor a komplex függvényt felbonthatjuk a következőképpen:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Az $f(z)$ függvényt a $z_0 \in H$ pontban folytonosnak nevezzük, ha minden $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ sorozat esetén $f(z_n) \to f(z_0)$.

Ezzel ekvivalensek a következő definíciók is.

1. Az $f(z)$ függvényt a $z_0 \in H$ pontban folytonosnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $|z - z_0| < \delta$ és $z \in H$ esetén $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

2. Az $f(z)$ függvény a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban akkor folytonos, amikor $u(x, y)$ és $v(x, y)$ függvények is folytonosak az (x_0, y_0) pontban.

Jelölje ζ a $w = f(z)$ függvény H értelmezési tartományának torlódási pontját. Az $\omega \in \mathbb{C}$ pont az $f(z)$ függvény határértéke a ζ pontban, ha minden $z_n \to \zeta$ $(n \to \infty)$ sorozat esetén $f(z_n) \to \omega$.

Jelölések: $\lim_{z\to\zeta} f(z) = \omega$, $f(z) \to \omega$ $(z \to \zeta)$.

Ekvivalens definíció:

$\lim_{z\to\zeta} f(z) = \omega \Leftrightarrow$minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, amelyre $0 < |z - \zeta| < \delta$ és $z \in H$ esetén $|f(z) - \omega| < \varepsilon$.

Megjegyzés: Ha $\zeta \in H$ és itt $f(z)$ folytonos, akkor a $z = \zeta$ pontban van határértéke és ez éppen $f(\zeta)$.

2.3. Komplex függvények differenciálása és integrálása

Az $f(z)$ függvényt differenciálhatónak nevezzük a $z_0 \in H$ pontban, ha minden $z_n \to z_0$ $(z_n \neq z_0,$ $n \to \infty)$ sorozat esetén van egy közös határértéke az

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$$

differencia hányadosnak. Ezt a közös

$$\lim_{z_n \to z_0,\, z_n \neq z_0} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = A$$

határértéket a $w = f(z)$ függvény z_0 pontbeli differenciálhányadosának, vagy deriváltjának nevezzük.

Jelölése: $f'(z_0)$.

A deriválás szabályai a valós esethez hasonlóak:

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$(f(z)\,g(z))' = f'(z)\,g(z) + f(z)\,g'(z)\,,$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\,g(z) - f(z)\,g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

Példa: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$
Példa nemdifferenciálható komplex függvényre:
1. $f(z) = \mathrm{Re}\,(z)$. Ekkor

$$\frac{\mathrm{Re}\,(z+h) - \mathrm{Re}\,(z)}{h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h \text{ valós} \\ 0, & \text{ha } h \text{ tiszta képzetes} \end{cases}$$

2. $f(z) = \overline{z}$. Ekkor

$$\frac{\overline{(z+h)} - \overline{z}}{h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h \text{ valós} \\ -1, & \text{ha } h \text{ tiszta képzetes} \end{cases}$$

Ha az $f(z)$ függvény a T tartomány minden pontjában differenciálható, akkor az $f(z)$ függvényt T-ben *holomorfnak* nevezzük.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ differenciálható és legyen

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\,.$$

Ha $h \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \to f'(z)$$

miatt létezik $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ és $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Ha $h = it$ $(t \in \mathbb{R})$, akkor

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{it} + i\frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{it} \to f'(z)$$

miatt létezik $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ és $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ $(1/i = -i)$.

A derivált egyértelműsége miatt

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

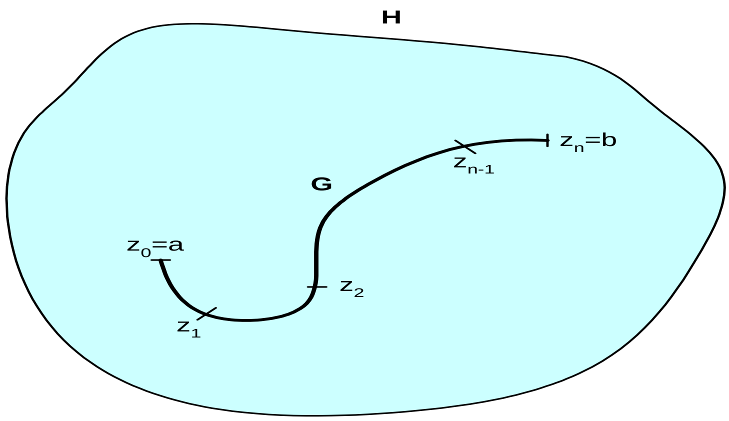
ahonnan azonnal következik az un. Cauchy-Riemann féle parciális differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Megjegyzés: A Cauchy-Riemann egyenlet fennállásából nem következik a differenciálhatóság.

Ha $x(t)$ és $y(t)$ a valós t $(\alpha \le t \le \beta)$ paraméter folytonos függvényei, akkor a $z(t) = x(t) + iy(t)$ függvény a komplex síkban egy folytonos G görbét ír le, amely az $a = z(\alpha)$ és $b = z(\beta)$ pontokat köti össze.

A G görbét rektifikálhatónak nevezzük, ha bárhogyan vesszük G-n az egymást követő $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$ pontokat, az ezeket összekötő töröttvonal (poligon) $\sum_{i=1}^{n} |z_i - z_{i-1}|$ hossza a beosztástól független korlát alatt marad. A pontos felső korlát a G görbe hossza.



Legyen $f(z)$ a $G \subseteq H$ görbén folytonos, $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$ egymásutáni pontok a G görbén, ξ_k a (z_{k-1}, z_k) görbeív tetszőleges pontja és

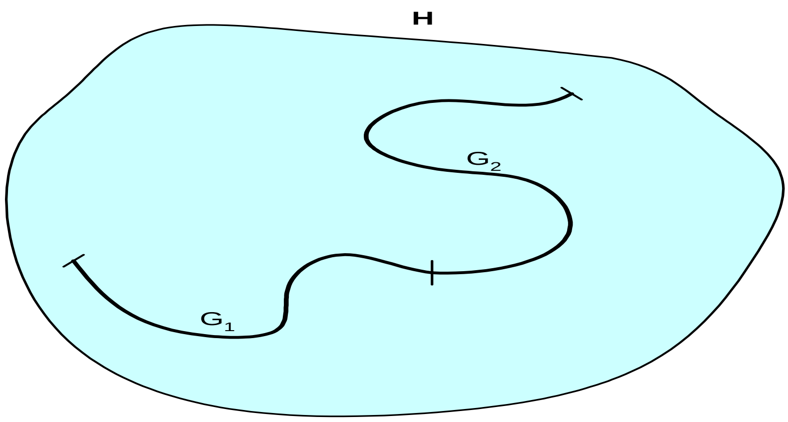
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(z_i - z_{i-1}).$$

Ha $\max_{1 \le i \le n} |z_i - z_{i-1}| \to 0$, akkor $s_n \to s$ $(n \to \infty)$ és s értéke független a felosztás sorozat megválasztásától. Az s értéket az $f(z)$ függvény G görbén vett (irányított) integráljának nevezzük.

Jelölés: $s = \int_G f(z)\, dz$.

Az integrál egyszerű tulajdonságai:

1. $\int_{G_1+G_2} f(z)\, dz = \int_{G_1} f(z)\, dz + \int_{G_2} f(z)\, dz$

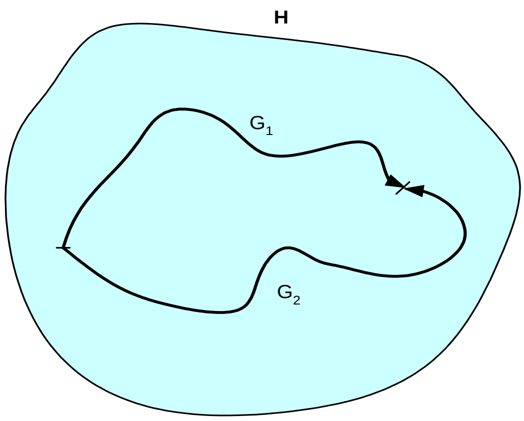


2. $\int_G cf(z)\, dz = c \int_G f(z)\, dz$
3. $\int_G [f_1(z) + f_2(z)]\, dz = \int_G f_1(z)\, dz + \int_G f_2(z)\, dz$.

Cauchy-féle integráltétel: *Ha az $f(z)$ függvény a T egyszeresen összefüggő tartományban holomorf és G a T belsejében haladó (nem szükségképpen egyszerű) zárt görbe, akkor*

$$\int_G f(z)\,dz = 0.$$

Következmény: Az integrál független az úttól:



$$\int_{G_1} f(z)\,dz = \int_{G_2} f(z)\,dz$$

Tegyük fel, hogy $f(z)$ az egyszeresen összefüggő T tartományban holomorf. Ekkor a T-ben haladó görbékre, amelyeknek kezdőpontja a és végpontja z, az

$$F(z) = \int_a^z f(z)\,dz$$

integrál értéke csak z-től függ.

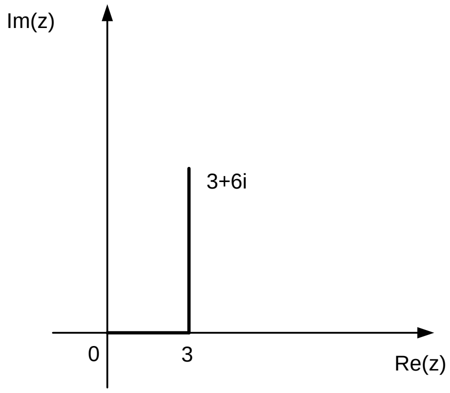
Az $F(z)$ függvény a T-ben holomorf és $F'(z) = f(z)$.

Definíció: *Ha az egyszeresen vagy többszörösen összefüggő T tartományon a holomorf $f(z)$ függvényhez található olyan, a T-n értelmezett $\Phi(z\ )$ függvény, melyre $\Phi'(z) = f(z)$, $z \in T$, akkor Φ-t az $f(z)$ függvény primitív függvényének nevezzük.*

A primitív függvény konstans erejéig egyértelmű, valamint tetszőleges T-ben haladó görbére fennáll (Newton-Leibniz):

$$\int_a^b f(z)\,dz = \Phi(b) - \Phi(a)\,.$$

Példa: Számítsuk ki a $w = z^2$ függvény integrálját a $G : 0, 3, 3 + 6i$ útvonal mentén!



A függvény holomorf $\mathbb{C}$-ben, ezért

$$\begin{aligned}\int_G z^2 dz &= \int_{z=0}^{z=3+6i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{3+6i} = \frac{1}{3}(3+6i)^3 \\ &= 9(1+2i)^3 = 9\left(1 + 6i + 12i^2 + 8i^3\right) \\ &= -99 - 18i.\end{aligned}$$

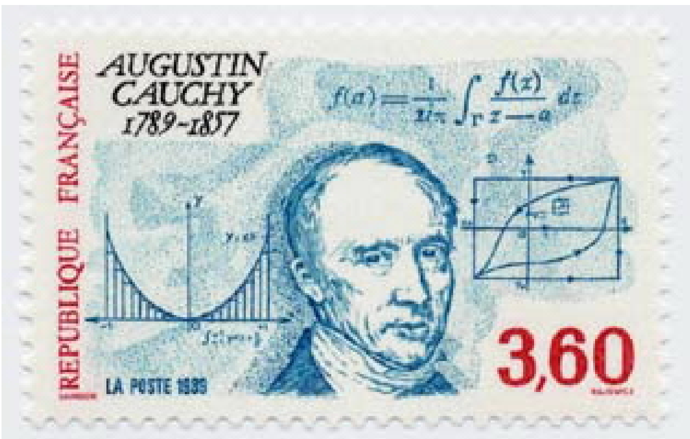
A Cauchy-féle integrálformula.

Ha T tartomány, G rektifikálható zárt görbe, amely belsejével együtt benne van T-ben és az a pontot belsejében tartalmazza, $f(z)$ holomorf T-n, akkor

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Következmény:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$



2.4. Taylor- sorok

Végtelen sor (ugyanaz mint valósban):

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j = u_1 + u_2 + \cdots + u_j + \cdots \quad (u_j \in \mathbb{C})$$

A végtelen sor konvergens, ha az $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sor konvergens, ahol

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} u_j = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Ekkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Ha $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| < \infty$, akkor a végtelen sort abszolút konvergensnek nevezzük.
Hatványsor:

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_j z^j + \cdots \quad (c_j, z \in \mathbb{C}).$$

A hatványsor a $|z| < R$ feltétel kielégítő komplex számokra abszolut konvergens. Az R számot a hatványsor konvergencia sugarának nevezzük.

Cauchy-Hadamard tétel: *A fenti hatványsor R konvergencia sugarát a hatványsor együtthatóiból képezett*

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \ldots, \sqrt[n]{|c_n|}, \ldots$$

sorozat legnagyobb torlódási értékének (pontjának) reciproka adja:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Tulajdonságok:

1. Ha $R > 0$, akkor a hatványsor a konvergenciakör belsejében holomorf függvény és tagonként differenciálható, azaz

$$f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j z^{j-1}.$$

2. Ha $R > 0$, akkor a sor a konvergenciakör belsejében akárhányszor differenciálható.

A

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^j = c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \cdots + c_j (z-a)^j + \cdots \quad (a, c_j, z \in \mathbb{C})$$

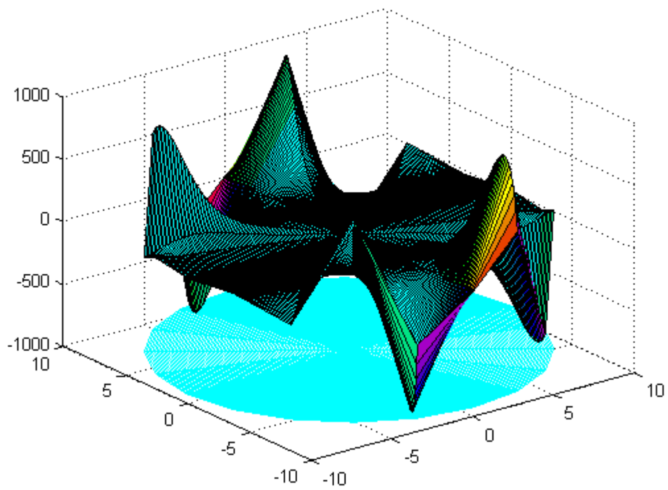
alakú sorok is hatványsorok, amelyek konvergencia köre az a pont körüli R sugarú kör.

Exponenciális és trigonometrikus függvények

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$



Komplex sin(z)

A $z = \log w$ függvényt a $w = e^z$ függvény inverzeként értelmezzük ($w \neq 0$):

$$\log w = \log |w| + i\,(\arg w + 2k\pi)\,, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

A $z = \log w$ értékek közül pontosan egy esik a $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y < \pi$ sávba. Ezt *főértéknek* nevezzük

Taylor sor:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$

A Taylor sor egy bizonyos konvergencia körben konvergens és itt valóban magát az $f(z)$ függvényt adja.

3. fejezet

Fourier-sorok

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Az egyszerű harmonikus rezgést az

$$s = A \sin(\omega t + \phi_0)$$

függvény írja le, ahol

- s a mozgó pont koordinátája,
- t az idő,
- A a rezgés amplitúdója,
- ω a körfrekvencia
- ϕ_0 a kezdeti fázis.

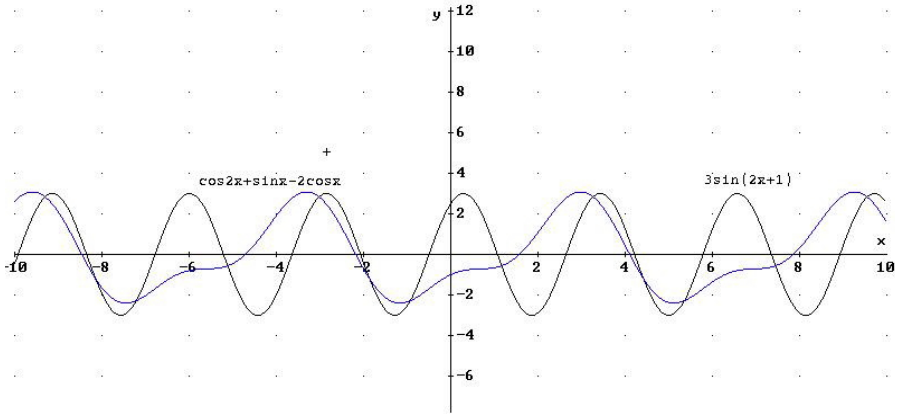
A rezgés T periódusa: $2\pi/\omega$.

Az $A \sin(\omega t + \phi_0)$ függvényt egyszerű harmonikus függvénynek nevezzük.

Tekintsük egyszerű harmonikus rezgések szuperpozícióját:

$$y = A_1 \sin(r_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(r_2 t + \phi_2) + \cdots + A_n \sin(r_n t + \phi_n).$$

A paraméterek függvényében az y függvény különféle periódikus függvényeket állit elő.



Kérdés: *Adott (minden) periodikus függvényt előállíthatunk-e alkalmasan megválasztott egyszerű harmonikus rezgések szuperpozíciójaként?*

Általánosabb kérdés: *Az f egyváltozós (2π szerint periódikus) valós függvény előállítható-e az*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

alakban?

A jobboldalt trigonometrikus sornak nevezzük.

Azonnal felmerülő kérdések:

1. együtthatók,
2. konvergencia.

Vizsgáljuk a sorfejtést a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Igazak a következő összefüggések:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\, dx = 0 \quad (\forall k),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx = 0 \quad (k \neq 0),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(px)\, dx = 0 \quad (\forall k, p),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(px)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq p \\ \pi, & \text{ha } k = p \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(px)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq p \\ \pi, & \text{ha } k = p \neq 0 \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $f(x)$ definiálva van a $[-\pi, \pi]$ intervallumon és "sorbafejthető", azaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

valamint a sorfejtés tagjai tagonként integrálhatók.

Integráljuk mindkét oldalt x szerint a $[-\pi, \pi]$ intervallumon:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx\right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0 \pi.\end{aligned}$$

Innen

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Most szorozzuk meg mindkét oldalt $\cos(kx)$-el $(k \geq 1)$ és ismét integráljuk őket:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \cos(kx)\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx)\,dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos(kx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos(kx)\,dx\right) \\ &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx = a_k \pi.\end{aligned}$$

Innen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,dx.$$

Végül szorozzuk meg mindkét oldalt $\sin(kx)$-el $(k \geq 1)$ és ismét integráljuk őket:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \sin(kx)\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx)\,dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin(kx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin(kx)\,dx\right) \\ &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = b_k \pi.\end{aligned}$$

Innen

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx.$$

Definíció: *Az*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

számokat az $f(x)$ függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük, a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

függvénysort pedig az $f(x)$ függvény Fourier-sorának.

A Fourier-sor (a Taylor sorhoz hasonlóan) csak bizonyos feltételek között konvergál.

Egy $f(x)$ függvényt a zárt $[a,b]$ intervallumon símának nevezünk, ha $f'(x)$ folytonos $[a,b]$-n. Az $f(x)$ függvényt az $[a,b]$ intervallumon szakaszonként simának nevezzük, ha $[a,b]$ felbontható véges sok zárt részintervallumra, amelyeken $f(x)$ sima.

Tétel. *Ha $f(x)$ szakaszonként síma a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, akkor Fourier-sora konvergál az $f(x)$-hez az intervallum mindazon belső pontjában, ahol $f(x)$ folytonos. Ha $x_0 \in (-\pi,\pi)$ szakadási pont, akkor a Fourier sor a jobb- és baloldali határérték*

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

számtani átlagához konvergál. A $[-\pi,\pi]$ intervallum mindkét végpontjában a Fourier-sor összege a

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

számmal egyenlő.

A Fourier-sor tulajdonságai:

1. Ha $f(x)$ páros függvény, akkor Fourier-sorában csak konstans és koszinuszos tagok szerepelnek, azaz a Fourier-sor alakja:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx.$$

Ekkor ui. $f(x)\sin(kx)$ páratlan függvény és $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = 0$.

2. Ha $f(x)$ páratlan függvény, akkor Fourier-sorában csak színuszos tagok szerepelnek, azaz a Fourier-sor alakja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx.$$

Ekkor ui. $f(x)\cos(kx)$ páratlan függvény és $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0$ $(k \geq 1)$.

Példa: Legyen

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ 1, & \text{ha } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

A függvénynek szakadása van az $x = 0$ pontban. Minthogy $f(x)$ páratlan, a Fourier-sora

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

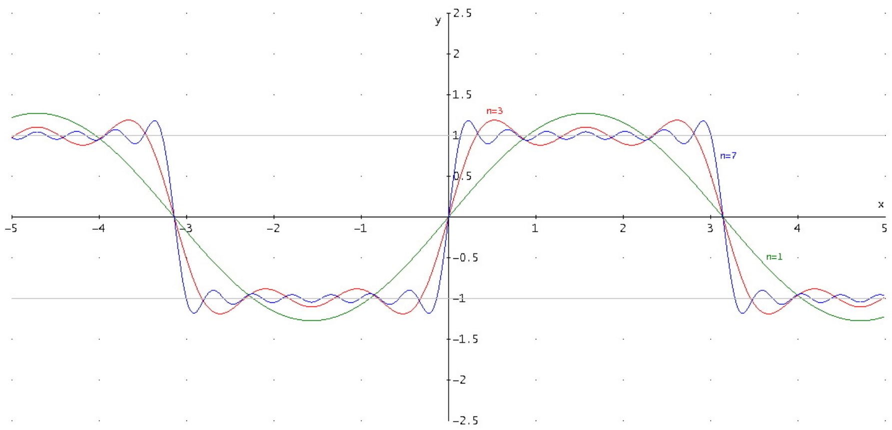
alakú, ahol

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-1)\sin(nx)\, dx + \int_{0}^{\pi} (1)\sin(nx)\, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + 1\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right).
\end{aligned}$$

Minthogy $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$ és

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right).$$

Az alábbi ábra az $f(x)$ függvényt és a Fourier-sor első n-tagjának összegét mutatja az $n = 1, 3, 7$ értékekre:



3.1. Fourier-sorok komplex alakban

Felhasználjuk az un. Euler-formulát:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \quad (\phi \in \mathbb{R}).$$

Tekintsük az

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Fourier-sort. Az Euler-formula alapján igaz, hogy

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\quad \sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}.$$

Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)\\&=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{inx}(a_n-ib_n)+e^{-inx}(a_n+ib_n)\right].\end{aligned}$$

Legyen $c_n=a_n-ib_n$. Az a_n és b_n együtthatók eredeti definícióját felhasználva kapjuk, hogy

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overbrace{(\cos nx-i\sin nx)}^{e^{-inx}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$$

Másrészt $a_n+ib_n=\overline{c}_n$ és

$$\overline{c}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx.$$

A továbbiakban $\overline{c}_n$ helyett a c_{-n} jelölést használjuk. Minthogy $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=c_0$, a Fourier-sor komplex alakja:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}c_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-inx}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},\end{aligned}$$

ahol

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$$

A c_n komplex számok sorozatát az $f(x)$ függvény *spektrális sorozatának*, a $|c_n|$ valós sorozatot pedig $f(x)$ *amplitudó sorozatának*, a $\phi_n=-\arg c_n$ sorozatot pedig a *fázis spektrumának* nevezzük.

Ha az $f(x)$ függvény a $(-A,A)$ intervallumon értelmezett, akkor a Fourier-sor komplex alakja a következő:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\omega_nx},$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{A}\int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-i\omega_n x} dx, \quad \omega_n = \frac{\pi n}{A}$$

Példa: Számítsuk ki $f(x) = e^x$ komplex Fourier-sorát a $[-\pi, \pi]$ intervallumon! Esetünkben

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)} dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{x(1-in)}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi(1-in)}\left(e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi(1-in)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right).$$

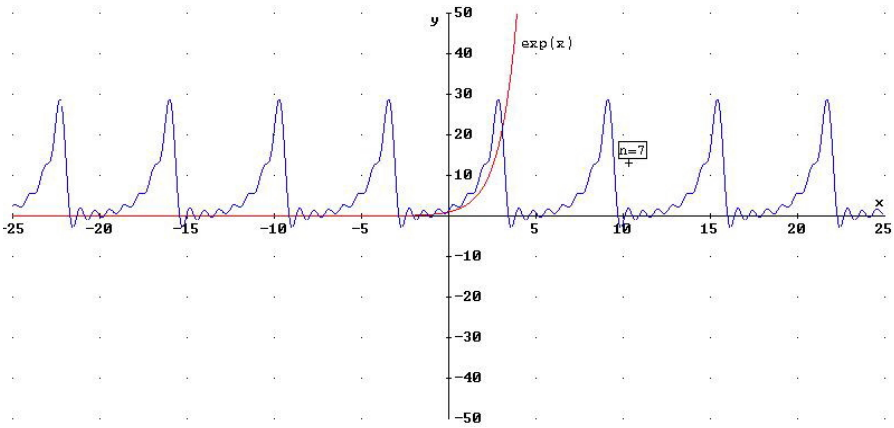
Tehát

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in}.$$

Ezt visszaírva a közönséges valós alakba kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right].$$

A következő ábra a Fourier-sor első $n = 7$ tagjának összegét mutatja:



4. fejezet

A Fourier-transzformált fogalma és legfontosabb tulajdonságai

Az $f(x)$ függvény Fourier-transzformáltjának nevezzük az

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

függvényt. Az inverz Fourier-transzformáltat az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

függvény definiálja.

Az olyan függvényekre, amelyekre $f(t) = 0$ teljesül $t < 0$ esetén, a Fourier-transzformált azonos lesz a Laplace-transzformálttal.

Az

$$F_c(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt, \quad F_s(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t)\, dt$$

transzformáltakat Fourier koszinusz, ill. Fourier szinusz transzformációknak nevezzük.

A Fourier-transzformáltak és az inverz Fourier transzformáltak számos függvényre táblázatolva vannak.

Hasonlítsuk össze a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

formulákat a Fourier-sorok komplex alakjával!

Az $(-A, A)$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény esetén a Fourier-sor komplex alakja:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \quad c_n = \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-i\omega_n x} dx, \quad \omega_n = \frac{\pi n}{A}.$$

A $(-\infty, \infty)$ intervallumon a c_n spektrális sorozatot az $F(\omega)$ Fourier-transzformálttal (az $f(x)$ spektrális függvényével), a $c_n e^{i\omega_n x}$ kifejezések összegét pedig az $F(\omega) e^{i\omega x}$ függvény integráljával helyettesítjük. Az $|F(\omega)|$ függvényt az $f(x)$ függvény amplitúdó spektrumának, a $\phi(\omega) = -\arg F(\omega)$ függvényt pedig fázis spektrumának nevezik.

Példa: Számoljuk ki az

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad (a > 0)$$

függvény Fourier-transzformáltját, amplítúdó és fázis spektrumát!

Egyszerű számolással:

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \left[-\frac{e^{-t(a+i\omega)}}{a+i\omega} \right]_0^\infty = \frac{1}{a+i\omega}.$$

Tehát az amplítúdó spektrum függvény:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}.$$

A fázis spektrum függvény pedig:

$$\phi(\omega) = -\arg F(\omega) = \arctan \frac{\omega}{a}.$$

5. fejezet

A Laplace-transzformáció

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Legyen $F(t)$ adott, a $t \geq 0$ félegyenesen értelmezett függvény, $p \in \mathbb{C}$ komplex szám. Ekkor az

$$f(p) = L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} F(t)\, dt$$

előírással definiált $f(p)$ függvényt az $F(t)$ *eredeti függvény* Laplace-transzformáltjának nevezzük.

Értelemszerűen a Laplace transzformált akkor létezik, ha az improprius integrál létezik. Ez csak egy $\operatorname{Re} p > \sigma$ alakú komplex félsíkon létezik, ahol σ az $F(t)$ függvénytől függ. A $\operatorname{Re} p > \sigma$ komplex félsíkot a Lapalace-transzformáció konvergencia tartományának nevezzük.

Példa: $F(t) = t$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} t dt = \left[-\frac{t}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= \left[-\frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

Tehát $L\{t\} = 1/p^2$. Itt $\sigma = 0$, mert az integrál csak $\operatorname{Re} p > 0$ esetén konvergens.

A transzformáció tulajdonságai:

$$L\{F_1(t) + F_2(t)\} = L\{F_1(t)\} + L\{F_2(t)\},$$

$$L\{cF(t)\} = cL\{F(t)\},$$

$$L\left\{F'(t)\right\} = pL\left\{F(t)\right\} - F(0),$$

$$\begin{aligned} L\left\{F^{(n)}(t)\right\} &= p^n L\left\{F(t)\right\} - p^{n-1}F(0) - p^{n-2}F'(0) - \cdots \\ &- p^2 F^{(n-3)}(0) - pF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0), \end{aligned}$$

$$L\left\{\int_0^t F(t)\,dt\right\} = \frac{L\left\{F(t)\right\}}{p}.$$

Példa: $F'(t) = 1$. Ekkor $(F(t) = t,\ F'(t) = 1,\ F(0) = 0)$

$$L\left\{1\right\} = pL\left\{t\right\} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Példa: $\int_0^t 2tdt = t^2$. Ekkor

$$L\left\{t^2\right\} = \frac{L\left\{2t\right\}}{p} = \frac{2L\left\{t\right\}}{p} = \frac{2}{p^3}.$$

Legyen

$$P(t) = \int_0^t a(\tau)\,b(t-\tau)\,d\tau.$$

Ekkor

$$L\left\{P(t)\right\} = L\left\{a(t)\right\} L\left\{b(t)\right\},$$

amelyet konvolúció tételnek is hívnak. Szokásos jelölése:

$$a(t) * b(t) = \int_0^t a(\tau)\,b(t-\tau)\,d\tau$$

és

$$L\left\{a(t) * b(t)\right\} = L\left\{a(t)\right\} L\left\{b(t)\right\}.$$

A fenti tételekkel igen sok függvény Laplace-transzformáltja meghatározható. A gyakorlatban a fordítottja is szükséges: adott $f(p)$ függvényhez meghatározandó az $F(t)$ eredeti függvény.

Ez tkp. a

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} F(t)\,dt = f(p)$$

integrálegyenlet megoldását jelenti $F(t)$-re.

A Laplace-transzformáltak és különösen az inverz Laplace transzformáltak számos függvényre táblázatolva vannak.

6. fejezet

A mátrix számítás elemei

6.1. Mátrixok és mátrixműveletek

Definíció. *Legyenek n és m pozitív egész számok. Egy A $m \times n$ típusú mátrixon valós, vagy komplex a_{ij} számok alábbi táblázatát értjük:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Az a_{ij} az A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában álló mátrixelemet jelöli. Mátrixok szokásos jelölése még a következő:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Néhány tömörebb mátrixmegadási mód:

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}, \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}.$$

Az $m \times n$ típusú valós mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{m\times n}$ jelöli, a komplex eleműeket pedig $\mathbb{C}^{m\times n}$. Nyílvánvalóan teljesül, hogy

$$\mathbb{R}^{m\times n} \subset \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Az A mátrixot *négyzetesnek* nevezzük, ha $m = n$. Ekkor a tömör megadási módok a következőképpen egyszerűsödnek:

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}, \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$

A mátrixok közti fontosabb műveleteket az alábbiak szerint definiáljuk.
1. Összeadás: $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

$$C = A + B \in \mathbb{C}^{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n).$$

Az összeadás kommutatív és asszociatív:

$$A + B = B + A\,, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

2. Számmal való szorzás: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, λ valós vagy komplex szám,

$$C = \lambda A \in \mathbb{C}^{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n).$$

A számmal való szorzás asszociatív és disztributív:

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Jegyezzük meg, hogy megállapodás szerint $\lambda A = A\lambda$.
3. Transzponálás (tükrözés): $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

$$C = A^T \in \mathbb{C}^{n\times m} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m).$$

A transzponálásra fennáll, hogy

$$(A^T)^T = A, \quad (A + B)^T = A^T + B^T.$$

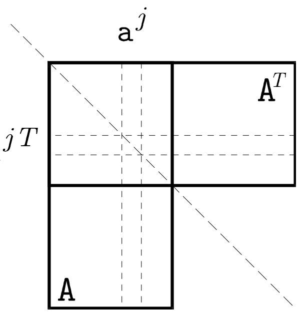
Az A mátrixot *szimmetrikusnak* nevezzük, ha $A^T = A$. Értelemszerűen csak a négyzetes mátrixok lehetnek szimmetrikusak.
Példa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = C^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A példákból is kitűnik, hogy a transzponálás művelete tulajdonképpen a mátrix elemeinek az $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{tt}$ $(t = min\,\{m, n\})$ diagonálisra való tükrözése. Sematikusan:



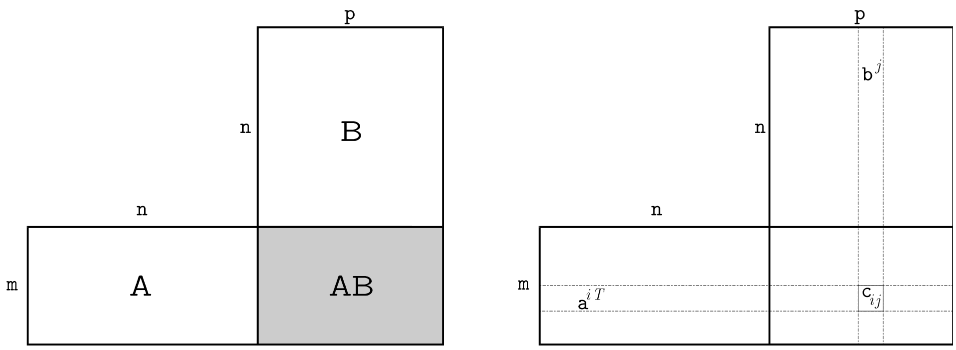
Minden sorvektor pontosan egy oszlopvektor transzponáltja és fordítva.
4. Szorzás: $A \in \mathbb{C}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{C}^{k \times n}$,

$$C = AB \in \mathbb{C}^{m \times n} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj} \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n).$$

Vegyük észre, hogy a szorzatmátrix (i, j) indexű elemét úgy kapjuk, hogy az i-edik sort szorozzuk a j-edik oszloppal, azaz

$$c_{ij} = [a_{i1}, \ldots, a_{ik}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzás szabályának megtanulását segítheti elő az alábbi ábra:



Példa. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$C = AB = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & 11 & -5 \end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzás fontos tulajdonságai a következők:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC), \\ A(B+C) &= AB + AC, \\ (A+B)C &= AC + BC, \\ (AB)^T &= B^T A^T. \end{aligned}$$

Fontos megjegyezni, hogy a szorzás nem kommutatív, tehát általában

$$AB \neq BA. \tag{6.1}$$

A továbbiakban a mátrix és mátrix-vektor műveletek felírásánál feltesszük, hogy az ott szereplő mátrixok, ill. vektorok méretei olyanok, amelyek lehetővé teszik az adott műveletet.

Definíció. *Az egyetlen sorból, vagy egyetlen oszlopból álló mátrixot vektornak nevezzük.*

A sorvektorokat $x = [x_1, \ldots, x_n]$, az oszlopvektorokat az

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

formában adjuk meg, ahol $\mathbb{C}^n$ az n komponensű oszlopvektorok halmaza (tulajdonképpen $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{C}^{n\times 1}$).

Az oszlopvektorokat meg lehet adni az $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$, a sorvektorokat pedig az

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^n$$

formában is.

Az i-edik egységvektornak az i-edik komponense 1, a többi pedig 0. Oszlopvektornak tekintve tehát:

$$e_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n.$$

Definíció. *Az $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egységmátrix, ha*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az egységmátrixra fennáll, hogy minden $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ esetén

$$AI = IA = A.$$

Definíció. *Az $0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix zérusmátrix, ha minden eleme 0, azaz*

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

A zérusmátrixra fennáll, hogy minden A mátrix esetén

$$A + 0 = A, \quad A0 = 0.$$

6.2. Mátrixok inverze és determinánsa

Definíció. *Az $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixot az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix inverzének nevezzük, ha $AX = XA = I$.*

Ha az inverz mátrix létezik, akkor egyértelmű. Az inverz mátrix jelölése $A^{-1} = X$. Az inverz mátrixra teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T := A^{-T}.$$

Jelölje $A(i)$ azt az $(n-1)\times(n-1)$-es mátrixot, amelyet az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixból az első oszlop és az i-edik sor elhagyásával kapunk.

Definíció. *Az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(n \geq 1)$ négyzetes mátrix determinánsát a*

$$\det\left([a_{11}]\right) = a_{11}, \quad n = 1$$

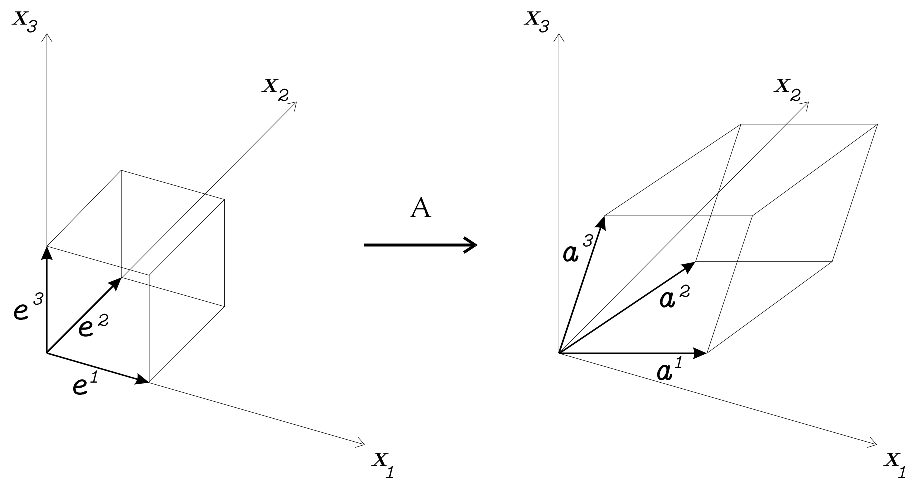
$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad n = 2$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{i1} \det(A(i)), \quad n \geq 3.$$

előírások definiálják.

A determinánsnak egyéb jelölései is vannak: $|A|$, vagy $|a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$.

A determinánsnak geometriai jelentés is adható. Vizsgáljuk az $x \to Ax$ transzformáció hatását az e^1, e^2, e^3 egységvektorok által kifeszített un. *egységkockán* az $\mathbb{R}^3$ térben. Ha $A = [a^1, a^2, a^3] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, akkor az egységvektorok képei az A mátrix oszlopvektorai: $a^j = Ae^j$. A mátrix oszlopai által kifeszített ferdetestet a következő ábra mutatja.

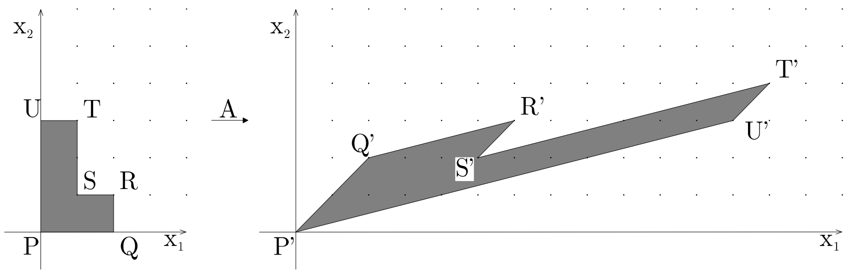


Megmutatható, hogy $\det(A) = \det([a^1, a^2, a^3])$ az a^1, a^2 és a^3 oszlopvektorok által kifeszített ferdehasáb térfogata. Minthogy az egységkocka térfogata 1, a determináns a térfogat nagyításának mértékeként fogható fel. Ez általában is így van. Tekintsük a tetszőleges alakú, térfogattal rendelkező $S \subseteq \mathbb{R}^n$ test képét, amelyet $A(S) = \{y = Ax | x \in S\}$ jelöl. Igazolható, hogy általános feltételek mellett

$$\det(A) = \frac{A(S) \text{ térfogata}}{S \text{ térfogata}}. \tag{6.2}$$

Ha S az $e^1, \ldots, e^n \in \mathbb{R}^n$ egységvektorok által kifeszített egységkocka, akkor térfogata 1 és $\det(A)$ az A mátrix oszlopvektorai által kifeszített n-dimenziós parallelepipedon térfogata. Ha $\det(A) = 0$, akkor ez a térfogat 0. Ha $\det(A) < 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $x \to Ax$ transzformáció megváltoztatja A orientációját.

Példa. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa -3. Az alábbi ábrán az L alakú tartomány körüljárását az $x \to Ax$ leképezés megfordítja.



A determinánsok legfontosabb tulajdonságai:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \tag{a}$$

$$\det\left(A^T\right) = \det(A), \tag{b}$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \quad (\alpha \in \mathbb{C}). \tag{c}$$

Tétel. *Az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $\det(A) \neq 0$.*

6.3. Lineáris egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek általános alakja m egyenlet és n ismeretlen esetén:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n &= b_i \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{6.3}$$

Az egyenletrendszert megadhatjuk a tömörebb

$$Ax = b \tag{6.4}$$

formában, ahol

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{C}^{m\times n},\ x \in \mathbb{C}^n,\ b \in \mathbb{C}^m.$$

Ha $m < n$, akkor az egyenletrendszert *alulhatározottnak* nevezzük. Ha $m > n$, akkor *túlhatározott* egyenletrendszerről beszélünk. Az $m = n$ esetben az egyenletrendszert *négyzetesnek* nevezzük.

A megoldásokat tekintve három eset lehetséges:

(i) az egyenletrendszernek nincs megoldása,

(ii) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van,

(iii) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

Definíció. *Ha az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszernek legalább egy megoldása van, akkor az egyenletrendszert konzisztensnek nevezzük. Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor az egyenletrendszert inkonzisztensnek nevezzük.*

Például az $x + 2y = 1$, $x + 2y = 4$ egyenletrendszer inkonzisztens.

A továbbiakban feltesszük, hogy $m = n$. Ismert a következő

Tétel. *Az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$) egyenletrendszernek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha létezik A^{-1}. Ekkor a megoldás $x = A^{-1}b$.*

A Cramer-szabály:

Jelölje $\left[A \overset{j}{\leftarrow} b\right]$ azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy A j-edik oszlopát kicseréljük a b vektorral. Ekkor igaz, hogy

$$x_j = \frac{\det\left(\left[A \overset{j}{\leftarrow} b\right]\right)}{\det(A)}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.5}$$

A szabály elméleti jelentősége rendkívüli, gyakorlati értéke azonban csekély.

Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ -x_2 + 5x_2 &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal! A szabály alapján

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3\cdot 5 - 2\cdot 4}{1\cdot 5 - 2(-1)} = \frac{7}{7} = 1$$

és

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1\cdot 4 - 3(-1)}{7} = 1.$$

Egy A négyzetes mátrix inverzét a Cramer-szabállyal úgy határozhatjuk meg, hogy rendre megoldjuk az

$$Ax^{(i)} = e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

lineáris egyenletrendszereket. Ekkor $A^{-1} = \left[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right]$.

Homogén lineáris egyenletrendszerek:

Az $Ax = 0$ ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) lineáris egyenletrendszert homogénnek nevezzük. Ennek mindig van un. triviális megoldása az $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, ui. $A0 = 0$. Ha egy $x \neq 0$ vektorra $Ax = 0$ teljesül, akkor az x vektort nemtriviális megoldásnak nevezzük.

Ha van $x \neq 0$ nemtriviális megoldás, akkor végtelen sok is van, ui. αx ($\alpha \neq 0$) is az, mert $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0$.

Tétel. *Az $Ax = 0$ ($A \in \mathbb{C}^{n\times n}$) négyzetes homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha* $\det(A) = 0$.

6.4. Sajátértékek és sajátvektorok

Az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix *sajátvektorán* azt az $x \neq 0$ vektort értjük, amelyet az $x \to Ax$ transzformáció a saját hatásvonalán hagy. Ez azt jelenti, hogy Ax arányos az x vektorral, azaz van olyan $\lambda \in \mathbb{C}$ szám, amelyre

$$Ax = \lambda x. \tag{6.6}$$

A λ arányossági számo az x sajátvektorhoz tartozó *sajátértéknek* nevezzük.

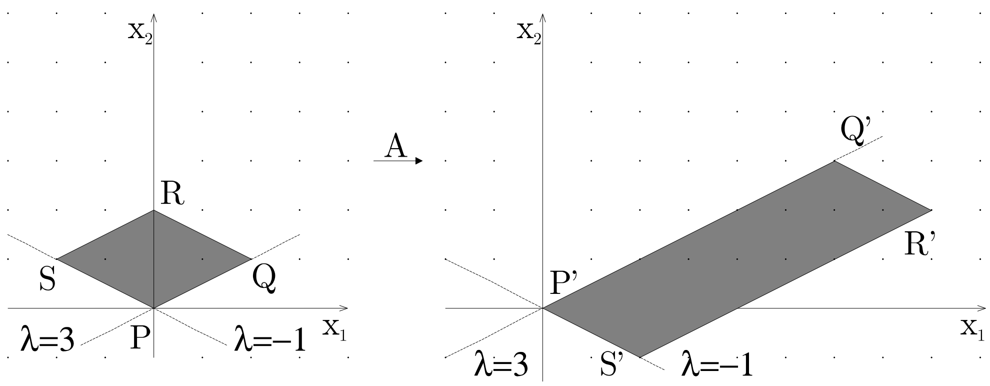
Például az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak két sajátértéke van: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok

$$x^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A következő ábrán szaggatott vonalak jelzik a sajátvektorok hatásvonalát.



Látható, hogy a $PQRS$ tartomány minden olyan pontja (helyvektora), amelyik nem fekszik a hatásvonalon, átkerül a $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó egyenes túlsó oldalára. Tehát ezek a vektorok nem maradnak a saját hatásvonalukon. A szaggatott vonalon levő vektorok képei ugyanazon a hatásvonalon maradnak.

Definíció. *A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot és az $x \in \mathbb{C}^n$ $(x \neq 0)$ vektort sajátértéknek, ill. a hozzátartozó sajátvektornak nevezzük, ha kielégítik az $Ax = \lambda x$ egyenletet.*

Állítás: *A sajátvektor nem egyértelmű.*

Ha x és y két nem feltétlenül különböző sajátvektor, akkor $\alpha x + \beta y$ is sajátvektor minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$ esetén. Ha ugyanis $Ax = \lambda x$ és $Ay = \lambda y$, akkor

$$A\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha\left(\lambda x\right) + \beta\left(\lambda y\right) = \lambda\left(\alpha x + \beta y\right)$$

is teljesül.

Az $Ax = \lambda x$ feltétel ekvivalens az

$$\left(A - \lambda I\right) x = 0 \tag{6.7}$$

homogén lineáris egyenletrendszerrel. Az x sajátvektor ennek egy nemtriviális megoldása. Az (6.7) homogén egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det\left(A - \lambda I\right) = 0$.

Tehát az A mátrix λ-val jelölt sajátértékeinek ki kell elégíteniük a

$$\phi\left(\lambda\right) = \det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6.8}$$

karakterisztikus egyenletet. A karakterisztikus egyenlet n-ed fokú polinom, amelynek alakja

$$\phi\left(\lambda\right) = \left(-1\right)^n \left(\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0\right) = 0. \tag{6.9}$$

A sajátértékek ennek az egyenletnek a gyökei. Az algebra alaptétele miatt a karakterisztikus egyenlet felbontható a

$$\phi\left(\lambda\right) = \left(-1\right)^n \left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right)\ldots\left(\lambda - \lambda_n\right) = 0 \tag{6.10}$$

gyöktényezős alakban, ahol $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ az egyenlet egymástól nem feltétlenül különböző gyökei. A karakterisztikus egyenlet gyökeinek multiplicitását a sajátértékek *algebrai multiplicitásának* nevezzük. Ha a többszörös gyököket multiplicitásukkal együtt számoljuk, akkor pontosan n gyök, azaz n sajátérték van.

Tétel. *Minden n-edrendű mátrixnak pontosan n sajátértéke van az algebrai multiplicitásokat is beleszámolva.*

A karakterisztikus polinom konstans tagja, amely a $\phi\left(0\right)$ helyettesitési értékkel azonos, kielégíti a

$$\det\left(A\right) = \left(-1\right)^n c_0 = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \tag{6.11}$$

összefüggést. Ezért az A mátrix akkor és csak akkor szinguláris, ha van legalább egy 0 sajátértéke. Egy mátrix akkor és csak akkor nem szinguláris, ha csak nemzérus sajátértéke van.

Példa. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0,$$

ahonnan A sajátértékei $\lambda_1 = \left(5 + \sqrt{3}i\right)/2$ és $\lambda_2 = \left(5 - \sqrt{3}i\right)/2$.

7. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek és rendszerek

A közönséges diferenciálegyenletek számos probléma megoldásában játsszanak fontos szerepet. Tanulmányozásuk és alkalmazásuk a klasszikus mechanika kifejlesztésével kezdődött.

Vizsgáljunk egy egység tömegű részecskét, amely egyenletes (konstans) gyorsulással mozog egy egyenes mentén. Ha az út-idő függvényt $s\left(t\right)$ jelöli, akkor a részecske mozgására az

$$s''\left(t\right) = a$$

összefüggést kapjuk. Innen kétszeri integrálással kapjuk a következőket:

$$\int s''\left(t\right) dt = \int a dt \Rightarrow s'\left(t\right) = at + C_1$$

és

$$\int s'\left(t\right) dt = \int \left(at + C_1\right) dt \Rightarrow s\left(t\right) = a\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Az ismeretlen C_1 és C_2 konstansok meghatározásához két adatra van szükségünk. Ha ismerjük a részecske $t = t_0$ pontbeli helyzetét és sebességét:

$$s\left(t_0\right) = s_0, \quad s'\left(t_0\right) = v_0,$$

akkor az

$$\begin{aligned} a\frac{t_0^2}{2} + C_1 t_0 + C_2 &= s_0, \\ a t_0 + C_1 &= v_0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből könnyen meghatározhatjuk a C_1 és C_2 konstansokat és végül az út-idő függgvényt.

A most látott példa egy, a fizikában (mechanikában) előforduló tipikus feladat egyszerű esete.

Alkalmazzuk a következő jelöléseket:

t : idő,
$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T \in \mathbb{R}^3$: helyvektor,
$\mathbf{y}'(t) = [y_1'(t), y_2'(t), y_3'(t)]^T \in \mathbb{R}^3$: sebesség (idő szerinti derivált).

Ha a részecskét tetszőleges t időpontban és $\mathbf{y}$ helyen egy előírt $\mathbf{v}(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3$ sebességgel tudjuk mozgatni, akkor az

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{y}) \tag{7.1}$$

összefüggés írja le a részecske mozgását (pályáját, trajektóriáját).

Az ilyen alakú, csak első deriváltat tartalmazó egyenleteket elsőrendű közönséges (explicit) differenciálegyenleteknek (differenciál egyenletrendszereknek) nevezzük.

Ha a részecske pozícióját egy $t = t_0$ kezdeti időpontban előírjuk,

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \tag{7.2}$$

akkor a (7.1)-(7.2) feltételeket együttesen az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték, vagy Cauchy-problémájának nevezzük.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Ha az aktuális sebesség mezőt nem ismerjük, de ismerjük a részecskére t időpontban és $\mathbf{y}$ helyen ható $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ erőt, amely a részecske gyorsulását adja. Ekkor a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}), \tag{7.3}$$

amely lényegében Newton második törvénye.

A feladat megoldásához szükség van a t_0 időpontbeli helyvektorra és sebességre:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{y}'(t_0) &= \mathbf{y}_0'. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Az (7.3)-(7.4) feladat szintén egy kezdetiérték probléma. A benne szereplő második derivált miatt másodrendű differenciálegyenletnek nevezzük.

Vezessük be az alábbi új jelöléseket:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_0' \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

Ekkor az (7.3)-(7.4) feladat átírható az ekvivalens

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

alakba. Az (7.6) alakú differenciálegyenleteket standard alakú kezdetiérték feladatoknak nevezzük.

Felmerülő fontos kérdések:

1. Az $\mathbf{f}$ függvény milyen tulajdonságai garantálják az $\mathbf{x}(t)$ megoldás létezését és egyértelműségét egy adott időintervallumon?

2. Az $\mathbf{x}(t)$ megoldásnak milyen tulajdonságai vannak?

3. Hogyan határozzuk meg az $\mathbf{x}(t)$ megoldást?

7.1. Elsőrendű differenciálegyenletek (rendszerek)

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt, nemüres halmaz, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\mathbf{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ típusú leképezés:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Az

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

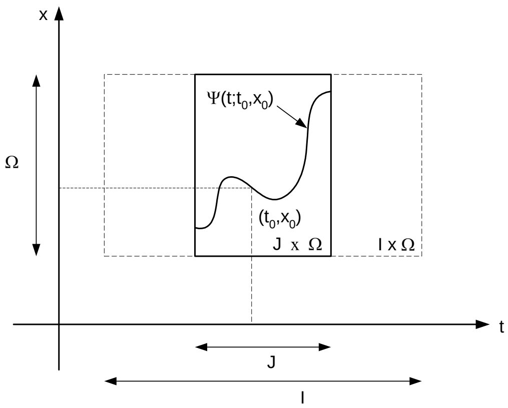
alakú Cauchy-problémákat vizsgáljuk, ahol

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

A megoldások kezdeti értékektől való függését az

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$$

jelöléssel fejezzük ki.



A Cauchy-feladat trajektóriája a

$$\{\Psi(t;t_0,\mathbf{x}_0) \mid t \in J\} \subset \Omega$$

görbe. A Cauchy-feladat megoldásgörbéje:

$$\left\{ \begin{bmatrix} t \\ \Psi(t;t_0,\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \mid t \in J \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Az $n = 1$ esetben ez az $x(t)$ függvény grafikonja.

7.1.1. Differenciálegyenletek osztályozása és tulajdonságai

Az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ differenciálegyenlet(rendszer) lineáris, ha $\mathbf{f}$ alakja

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{7.7}$$

ahol

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{7.8}$$

és

$$\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{7.9}$$

minden t-re.

A lineáris d.e. *homogén*, ha $\mathbf{b}(t) \equiv 0$.

Ha $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}$ valamilyen konstans $\mathbf{A}$ mátrixra, akkor a d.e. *állandó együtthatójú lineáris.*

Az $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ differenciálegyenletet *autónómnak* nevezzük, ha $\mathbf{f}$ nem függ explicit módon t-től, azaz

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) . \tag{7.10}$$

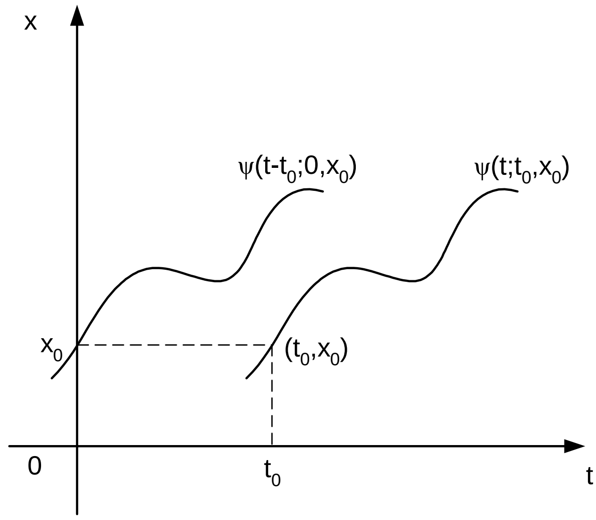
Az autónom d.e. rendelkeznek az un. *eltolási tulajdonsággal*:

Ha $\mathbf{x}(t)$ az (7.10) megoldása az (a, b) intervallumon, akkor bármilyen $s \in \mathbb{R}$ értékre $\mathbf{x}(t+s)$ az (7.10) megoldása az $(a-s, b-s)$ intervallumon.

Az idő-állapot térben az $\mathbf{x}(t+s)$-hez tartozó megoldásgörbe az $\mathbf{x}(t)$-hez tartozó megoldásgörbe s egységnyi eltolásával kapható meg. Korábbi jelöléssel az eltolási tulajdonság:

$$\Psi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \Psi(t - t_0; 0, \mathbf{x}_0) \quad (t_0 \in I) .$$

Illusztrálva:



A trajektóriát tkp. az $\mathbf{x}_0$ kezdeti érték határozza meg. Ezért autonom d.e. esetén általában $t_0 = 0$ a kezdeti időpillanat.

Ha valamilyen $T > 0$ értékre fennáll, hogy

$$\mathbf{f}(t + T, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (t \in I) ,$$

akkor a nem autonóm differenciálegyenletet *periódikusnak* nevezzük.

A legkisebb T értéket, amelyre ez teljesül, *periódusnak* nevezzük. A tulajdonságból azonnal következik, hogy a megoldások alakját a $t_0 \to t_0 \pm nT$ $(n \in \mathbb{N})$ eltolás nem változtatja meg, azaz

$$\Psi(t \pm nT; t_0 \pm nT, \mathbf{x}_0) = \Psi(t; t_0, \mathbf{x}_0) .$$

Az $\mathbf{x}(t)$ megoldás *periódikus*, ha van egy olyan $T > 0$ periódus, amelyre $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$ fennáll minden a megoldási intervallumba eső t esetén.

Megjegyzés: Periódikus differenciálegyenletek megoldásai nem szükségképpen periódikusak!

Példa: A

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

periódikus d.e. megoldása az $\mathbf{x}(0) = 0$ esetben az

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{bmatrix}$$

függvény, amely láthatóan nem periódikus ($t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $t_k \sin t_k \to \infty$).

7.1.2. Megoldások létezése és egyértelműsége

Az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (t \in I), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

differenciálegyenletrendszer megoldásának létezéséről és egyértelműségéről az alábbi "*lokális*" tételt mondjuk ki.

Tétel: *Tegyük fel, hogy az $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ függvények folytonosak és parciális deriváltjaik is folytonosak a $(t_0, \mathbf{x}_0)$ pont egy nyílt környezetében, akkor van egy olyan $(t_0 - h, t_0 + h) \subset I$ intervallum, amelyen létezik a d.e.-t és az $x(t_0) = x_0$ kezdeti értéket kielégítő egyetlen $x(t)$ megoldás.*

A $h > 0$ szám akármilyen kicsi is lehet ("lokalitás") és $(t_0 - h, t_0 + h) \subsetneqq I$. A kapott lokális megoldást az un. folytatási elv alkalmazásával lehet a "maximális" megoldási intervallumra kiterjeszteni.

Az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.11}$$

alakú lineáris differenciálegyenlet rendszerek megoldását igen részletesen tudjuk jellemezni.

Tétel: *Tegyük fel, hogy $A(t)$ és $b(t)$ folytonos és korlátos a teljes számegyenesen ($t \in R$). Az (7.11) lineáris differenciálegyenlet rendszernek pontosan egy megoldása van a $t_0 \in \mathbb{R}$ értékekre.*

Ha ismert a homogén

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (t \in \mathbb{R})$$

lineáris d.e. egy *alapmegoldása* $\mathbf{Y}(t)$ ($\mathbf{Y}(t)$ $n \times n$ mátrix), amelyre teljesül, hogy

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t),$$

akkor a

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.12}$$

kezdetiérték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 \tag{7.13}$$

alakú, mert

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{Y}(t_0)\,\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$$

és

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{Y}'(t)\,\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0\\ &= [\mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t)]\,\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0\\ &= \mathbf{A}(t)\left[\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0\right]\\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t)\,.\end{aligned}$$

Az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (t \in \mathbb{R})\,, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.14}$$

inhomogén lineáris d.e. megoldását az

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t) \tag{7.15}$$

alakban keressük (konstansok variálása módszer). Ekkor

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{Y}(t_0)\,\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

és

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{Y}'(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t)\\ &= [\mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t)]\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t)\,.\end{aligned}$$

Feltevésünk szerint $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,[\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t)] + \mathbf{b}(t)$ is teljesül. A két egyenlőségből összevonás és egyszerűsítés után az egyszerű

$$\begin{aligned}\mathbf{c}'(t) &= \mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{b}(t)\\ \mathbf{c}(t_0) &= \mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0\end{aligned}$$

kezdeti érték problémát kapjuk. Ennek megoldása:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(s)\,\mathbf{b}(s)\,ds,$$

ahonnan a

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (t \in \mathbb{R})\,, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.16}$$

inhomogén lineáris differenciál egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = \mathbf{Y}(t)\left[\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(s)\,\mathbf{b}(s)\,ds\right], \tag{7.17}$$

illetve

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}^{-1}(s)\,\mathbf{b}(s)\,ds. \tag{7.18}$$

A homogén lineáris differenciálegyenlet $\mathbf{Y}(t)$ alapmegoldásának előállítása általában nem könnyű és az $n \geq 2$ esetben nem is ismert általános módszer erre. Ha azonban $\mathbf{A}$ konstans mátrix, akkor ($t_0 = 0$)

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\mathbf{A}t} := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \frac{t^j}{j!}. \tag{7.19}$$

A speciális ($n = 1$)

$$x' = a(t)\,x + b(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad x(t_0) = x_0 \tag{7.20}$$

skalár egyenlet megoldása:

$$x(t) = e^{\alpha(t)}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)} b(s)\,ds\right) \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{7.21}$$

ahol

$$\alpha(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds. \tag{7.22}$$

Ehhez az eredményhez csak a homogén $x' = a(t)\,x$ differenciálegyenlet megoldása kell:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x \Rightarrow \frac{dx}{x} = a(t)\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int a(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\ln x = \int a(t)\,dt \Rightarrow x = e^{\int a(t)dt}.$$

Példa: $y' = -(\cos t)\,y + 2\cos t$, $y(0) = 1$.
Ekkor $\alpha(t) = \int_0^t [-\cos s]\,ds = [-\sin s]_0^t = -\sin t$,

$$\int_0^t e^{\sin s}[2\cos s]\,ds = 2\int_0^t e^{\sin s}(\cos s)\,ds = 2\left[e^{\sin s}\right]_0^t = 2e^{\sin t} - 2,$$

ahonnan

$$y(t) = e^{-\sin t}\left(1 + 2e^{\sin t} - 2\right) = -e^{\sin t} + 2.$$

Példa: Oldjuk meg az

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1$$
$$x_1(\pi/4) = -1, \quad x_2(\pi/4) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek mátrix alakja:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

két "független" megoldást ad, ha eltekintük a kezdeti értékektől. Ekkor az alapmegoldás

$$\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t)] = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

és az (7.13) képlet alapján a kezdetiérték feladat általános megoldása:

$$\mathbf{Y}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

és $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -\sin t - \cos t \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Feladat: A homogén

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

d.e. fenti alapmegoldásának ismeretében határozzuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

inhomogén lineáris d.e. megoldását!

7.2. Magasabbrendű differenciálegyenletek

Legyen most $y(t)$ egy skalár függvény, amely n-szer folytonosan differenciálható az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon és legyen

$$\frac{d^k}{dt^k} y(t) = y^{(k)}(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon definiált

$$F\left(t, y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{7.23}$$

összefüggést n-ed rendű (implicit) differenciálegyenletnek nevezük. Az

$$y^{(n)} = G\left(t, y\left(t\right), y^{(1)}\left(t\right), \ldots, y^{(n-1)}\left(t\right)\right) \tag{7.24}$$

alakú összefüggéseket n-ed rendű explicit differenciálegyenletnek nevezzük. Az egyenlethez tartozó Cauchy-problémát az

$$y\left(t_0\right) = y_0, \quad y'\left(t_0\right) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_0^{(n-1)} \tag{7.25}$$

kezdeti érték feltételekkel adjuk meg

Az explicit n-ed rendű d.e.-k felírhatók (explicit) elsőrendű differenciálegyenlet rendszer formájában is: Az $\mathbf{x}$ vektor komponensei legyenek rendre

$$x_i\left(t\right) := y^{(i-1)}\left(t\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7.26}$$

az $\mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}\right)$ jobboldal pedig

$$\mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}\right) := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ G\left(t, x_1, \ldots, x_n\right) \end{bmatrix}. \tag{7.27}$$

Ekkor a (7.24) d.e. ekvivalens az $\mathbf{x}' = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}\right)$ elsőrendű differenciálegyenlet rendszerrel. A megfelelően átalakított kezdetiérték feltétel pedig:

$$\mathbf{x}\left(t_0\right) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix}. \tag{7.28}$$

Az explicit n-ed rendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$y^{(n)} + a_1\left(t\right) y^{(n-1)} + \cdots + a_0\left(t\right) y = b\left(t\right), \tag{7.29}$$

ahol $a_{n-1}\left(t\right), \ldots, a_0\left(t\right)$ és $b\left(t\right)$ adott folytonos függvények. A (7.26)-(7.27) transzformáció alkalmazásával ezt átírhatjuk az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

alakba, ahol

$$\mathbf{A}\left(t\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}\left(t\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b\left(t\right) \end{bmatrix}.$$

Ezt az $\mathbf{A}\left(t\right)$ mátrixot Frobenius-féle kisérőmátrixnak is nevezzük.

Definíció: *Az* $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_m(t)$ *függvények lineárisan függetlenek, ha a*

$$c_1\phi_1(t) + \cdots + c_m\phi_m(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

feltétel csak a $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ *választás esetén teljesül.*
Példa: $\phi_i(t) = t^{i-1}$,

$$c_1 + c_2 t + \cdots + c_m t^{m-1} = 0$$

csak véges sok (legfeljebb $m-1$) pontban teljesülhet.
Példa: $\phi_1(t) = \sin t$, $\phi_2(t) = \cos t$, $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$. Ha $c_1 \neq 0$, akkor $c_1 = -c_2 \cot t$, ami lehetetlen, ha $c_2 \neq 0$. Ha $c_2 \neq 0$, akkor $c_2 = -c_1 \tan t$, ami $c_1 \neq 0$ esetén lehetetlen.
Tétel: *Az*

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)\, y = b(t), \tag{7.30}$$

explicit n*-ed rendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása az*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(t) \tag{7.31}$$

alakban írható fel, ahol $\phi_1(t)$, $\phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$ *a homogén (7.30) egyenlet lineárisan független megoldásai,* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *konstansok.*

A homogén d.e. megoldásából a konstansok variálásának módszerével határozhatjuk meg az inhomogén (7.29) d.e. megoldását.

7.2.1. Speciális esetek

Vizsgáljuk az

$$L(y) = y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \tag{7.32}$$

valós konstans együtthatós homogén lináris másodrendű differenciálegyenlet megoldását!

Euler ötlete alapján a megoldásokat az $y(t) = e^{\lambda t}$ alakban keressük. Ekkor $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ és

$$L\left(e^{\lambda t}\right) = e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2\right) = 0.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $\phi(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$. A $\phi(\lambda)$ "karakterisztikus egyenlet" gyökeitől függően az alábbi esetek lehetségesek:

(i) λ_1, λ_2 valós és $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
(ii) λ_1, λ_2 komplex (konjugáltak),
(iii) $\lambda_1 = \lambda_2$ valós.

Az (i) esetben az általános megoldás:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{7.33}$$

Az (ii) esetben a két megoldás:

$$y_1(t) = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

és

$$y_2(t) = e^{(a-ib)t} = e^{at}(\cos bt - i \sin bt).$$

Valós megoldásokat keresünk. Vegyük észre, hogy

$$\widetilde{y}_1(t) = e^{at} \cos bt, \quad \widetilde{y}_2(t) = e^{at} \sin bt$$

szintén két lineáris független megoldás. Ezért az általános megoldás felírható az

$$y(t) = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt \tag{7.34}$$

alakban.

Az (iii) esetben keressük a második megoldást $y(t) = e^{\lambda_1 t} u(t)$ alakban. Ekkor

$$\begin{aligned} L\left(e^{\lambda_1 t} u\right) &= \left[\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} u + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 t} u' + e^{\lambda_1 t} u''\right] + p_1 \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 t} u + e^{\lambda_1 t} u'\right] + p_2 e^{\lambda_1 t} u \\ &= e^{\lambda_1 t} \left[u'' + (2\lambda_1 + p_1) u' + \left(\lambda_1^2 + p_1 \lambda_1 + p_2\right) u\right]. \end{aligned}$$

Minthogy λ_1 kétszeres gyök, $\phi(\lambda_1) = 0$ és $\phi'(\lambda_1) = 2\lambda_1 + p_1 = 0$. Tehát

$$L\left(e^{\lambda_1 t} u\right) = e^{\lambda_1 t} u'' = 0,$$

ahonnan $u'' = 0$. Ennek általános megoldása $u(t) = At + B$, ahol A és B konstansok. Tehát ekkor az általános megoldás:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_1 e^{\lambda_1 t}(At + B) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}. \tag{7.35}$$

Példa: $y'' + 2y' + 5y = 0$.

A karakterisztikus egyenlet: $\phi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, amelynek gyökei: $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$. Tehát $a = -1$ és $b = 2$. A keresett általános megoldás pedig:

$$y(t) = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t.$$

Példa: $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

Deriváljuk az előbbi általános megoldást:

$$\begin{aligned} y'(t) &= -C_1 e^{-t} \cos 2t - 2C_1 e^{-t} \sin 2t - C_2 e^{-t} \sin 2t + 2C_2 e^{-t} \cos 2t \\ &= (2C_2 - C_1) e^{-t} \cos 2t - (2C_1 + C_2) \sin 2t. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételekbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 1, \\ y'(0) &= 2C_2 - C_1 = -3, \end{aligned}$$

ahonnan $C_1 = 1$ és $C_2 = -1$. Tehát a Cauchy-feladat megoldása:

$$y(t) = e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t.$$

A konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet fontos alkalmazása mechanikai lengő rendszerek jellemzése. Ha feltételezzük, hogy a csillapitás arányos a sebességgel, akkor a mechanikai rendszer lengéseit leíró differenciálegyenlet:

$$my'' + hy' + ky = 0,$$

ahol

- m a tömeg,
- h a csillapítás tényezője,
- $k > 0$ a rugóállandó (arányos a visszatérítő erővel),
- y a nyugalmi helyzettől mért kitérés,
- t idő.

A karakterisztikus egyenlet

$$m\lambda^2 + h\lambda + k = 0,$$

amelynek megoldása

$$\lambda_{1,2} = -\frac{h}{2m} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Ha a csillapitás elég nagy, azaz $h^2 > 4mk$, akkor a gyökök valósak és negatívak. Az általános megoldás ekkor

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Minthogy $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, az $y(t)$ időben eltérés lecseng, azaz $y(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.

Ha a csillapitás kicsi, azaz $h^2 < 4mk$, akkor a gyökök komplexek $\lambda_{1,2} = -a \pm bi$, ahol $a = \frac{h}{2m} > 0$ és $b = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}$. Az általános megoldás pedig

$$y(t) = C_1 e^{-at}\cos bt + C_2 e^{-at}\sin bt \quad (a > 0).$$

Ekkor a rendszer egy csillapított (lecsengő) oszcilláló mozgást végez.

Ha nincsen csillapítás, azaz $h = 0$, akkor az

$$m\lambda^2 + k = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k/m}$. A d.e. megoldása pedig

$$y(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right),$$

ahol $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}t$ a csillapítatlan rezgés frekvenciája, A az amplítudója, kezdeti fázisa pedig δ.

Vizsgáljuk most az inhomogén másodrendű

$$L(y) = y'' + p_1(t)\,y' + p_2(t)\,y = f(t)$$

lineáris differenciálegyenlet megoldását a p_1 és p_2 együttható függvények folytonossága mellett. Tegyük fel, hogy ismerjük az

$$L(y) = y'' + p_1(t)\,y' + p_2(t)\,y = 0$$

homogén d.e. két lineárisan független megoldását $y_1(t)$-t és $y_2(t)$-t. Az inhomogén d.e. megoldását az

$$y(t) = C_1(t)\,y_1(t) + C_2(t)\,y_2(t)$$

alakban keressük (konstansok variálása módszer), ahol C_1 és C_2 egyenlőre ismeretlen függvények. Deriválás után kapjuk, hogy

$$y'(t) = C_1(t)\,y_1'(t) + C_2(t)\,y_2'(t) + C_1'(t)\,y_1(t) + C_2'(t)\,y_2(t)\,.$$

Feltesszük, hogy

$$C_1'(t)\,y_1(t) + C_2'(t)\,y_2(t) = 0.$$

Később belátjuk, hogy ez lehetséges. A feltevés miatt $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$ és

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
L(y) &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + p_1\left(C_1y_1' + C_2y_2'\right) + p_2\left(C_1y_1 + C_2y_2\right)\\
&= C_1\left(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p_1y_2' + p_2y_2\right) + C_1'y_1' + C_2'y_2'\\
&= C_1'(t)\,y_1'(t) + C_2'(t)\,y_2'(t) = f(t)\,.
\end{aligned}$$

Mindent összevetve C_1'-re és C_2'-re a következő "lineáris egyenletrendszert" kapjuk :

$$\begin{aligned}
C_1'(t)\,y_1(t) + C_2'(t)\,y_2(t) &= 0,\\
C_1'(t)\,y_1'(t) + C_2'(t)\,y_2'(t) &= f(t)\,.
\end{aligned}$$

Mátrix formában:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}. \tag{7.36}$$

Az $y_1(t)$ és $y_2(t)$ függvények lineáris függetlensége miatt a homogén

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszernek csak az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ triviális megoldása létezik, azaz

$$\det\left(\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}\right) \neq 0.$$

Tehát a (7.36) lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Jelölje a megoldásokat

$$C_1'(t) = \phi_1(t)\,, \quad C_2'(t) = \phi_2(t)\,.$$

Integrálással kapjuk, hogy

$$C_1(t) = \int \phi_1(t)\,dt + A_1, \quad C_2(t) = \int \phi_2(t)\,dt + A_2,$$

ahol A_1 és A_2 integrálási konstansok. Az inhomogén lineáris d.e. "általános" megoldása tehát:

$$y(t) = A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t) + y_1(t) \int \phi_1(t)\,dt + y_2(t) \int \phi_2(t)\,dt.$$

Feladat: A fenti eljárással adjuk meg és elemezzük a gerjesztett lengést leíró

$$my'' + hy' + ky = P_0 \sin \omega_k t$$

inhomogén másodrendű d.e. megoldását!

7.3. Megjegyzések

1. Számos, technikai és/vagy alkalmazási szempontból érdekes speciális esetben meg lehet határozni a differenciálegyenlet explicit (analitikus/elméleti) megoldását különféle fogások segítségével. Ezeket a differenciálegyenletekről szóló tankönyvek és kapcsolódó példatárak többnyire tartalmazzák, valamint Kamke, Murphi és Polyanin-Zaitsev összefoglaló munkái.

2. Ezek az "integrálási módszerek", vagy egy részük szimbolikus matematikai programcsomagokban is megtalálhatók. Pl. a DERIVE rendszer ODE1.MTH és ODE2.MTH programfájlja számos alapvető elsőrendű és másodrendű esetet tud kezelni.

3. Analitikus megoldások csak korlátozott számú esetben elérhetők és sok esetben ezek használhatósága is kérdéses. Ezért számos numerikus eljárást fejlesztettek ki közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldására, amelyek különféle programcsomagokban (MATLAB, MAPLE, stb.) könnyen megtalálhatók.

8. fejezet

A differenciálgeometria elemei

Jelöljük az $\mathbb{R}^3$-beli egységvektorokat a következőképpen:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor tetszőleges $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ felírható $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ alakban. A $\mathbf{v}$ vektor hosszán a $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ számot értjük. Két vektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatán az $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\phi$ számot értjük, ahol ϕ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt pozitív irányú szög. Igazolható, hogy

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\phi. \tag{8.1}$$

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektort értjük, amelynek hossza $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\phi$ és amelyre az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok (ebben a sorrendben) jobbsodrású rendszert alkotnak. Igazolható, hogy

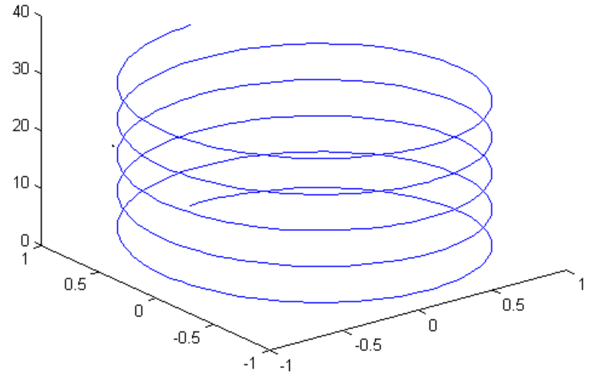
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{8.2}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}. \tag{8.3}$$

Az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \quad (t \in I) \tag{8.4}$$

előírással megadott egyváltozós vektor-skalár függvényt *térgörbének* nevezzük.
Példa: $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, t]^T$ $(0 \le t \le 10\pi)$ csavarvonal:



A vektor-skalár függvények deriváltját a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

előírással definiáljuk. Eszerint

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

A derivált vektor geometriailag a térgörbe érintővektora. Ha $\mathbf{r}(t)$ egy fizikai pontmozgást ír le, akkor a pontmozgás sebességvektora.

A vektor-skalár függvények deriváltjaira vonatkozó fontosabb műveleti szabályok:

1. $\mathbf{r}' = 0$, ha $\mathbf{r}$ konstans vektor,
2. $(\mathbf{v} \pm \mathbf{w})' = \mathbf{v}' \pm \mathbf{w}'$,
3. $(f(t)\,\mathbf{r})' = f'(t)\,\mathbf{v} + f(t)\,\mathbf{v}'$,
4. $\left(\mathbf{v}^T\mathbf{w}\right)' = (\mathbf{v}')^T\,\mathbf{w} + \mathbf{v}^T\mathbf{w}'$,
5. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}'$,
6. $$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}.$$

Vektor-skalár függvény magasabbrendű deriváltjai:

$$\frac{d^k\mathbf{r}}{dt^k} = \mathbf{r}^{(k)}(t) = x^{(k)}(t)\,\mathbf{i} + y^{(k)}(t)\,\mathbf{j} + z^{(k)}(t)\,\mathbf{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ha $\mathbf{r}(t)$ fizikai pontmozgást ír le, akkor $\mathbf{r}''(t)$ a mozgó pont gyorsulásvektora.

Vektor-skalár függvény Taylor-sorfejtése:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt}(t-t_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{d^k\mathbf{r}(t_0)}{dt^k}(t-t_0)^k + \cdots.$$

Ez tkp. az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ függvények Taylor-sorfejtéseiből álló vektor.

A vektor-skalár függvény határozatlan integrálja:

$$\mathbf{w}(t) = \int \mathbf{v}(t)\, dt, \quad \text{ha } \mathbf{w}'(t) = \mathbf{v}(t).$$

A megfelelő határozott integrál pedig:

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{v}(t)\, dt = \mathbf{w}(b) - \mathbf{w}(a).$$

Az $\mathbf{r}(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ térgörbe ívhossza:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Ha az s ívhossz szerint paraméterezzük a térgörbét (természetes paraméter), akkor az ívhossz szerinti deriváltvektor a $\mathbf{t}$-vel jelölt érintő egységvektor:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \mathbf{r}' \cdot \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{t}.$$

A következőkben feltesszük, hogy az $\mathbf{r}$ görbe az s ívhossz paraméterrel van megadva (ha nem akkor a fenti ívhossz képlet alapján ezt megtehetjük).

A következő fogalmakat vezetjük be:

A térgörbe érintővektora (az s_1 paraméterértékkel megadott M pontban):

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}(s_1)}{ds}.$$

A $\mathbf{t}$ egységvektor egyirányú a térgörbe M pontbeli érintőjével és a görbe pozitív irányába mutat.

Főnormális és görbület: A $\frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}$ vektorral azonos hatásvonalon lévő $\mathbf{n}$ egységvektort a görbe M pontbeli *főnormálisának* nevezzük:

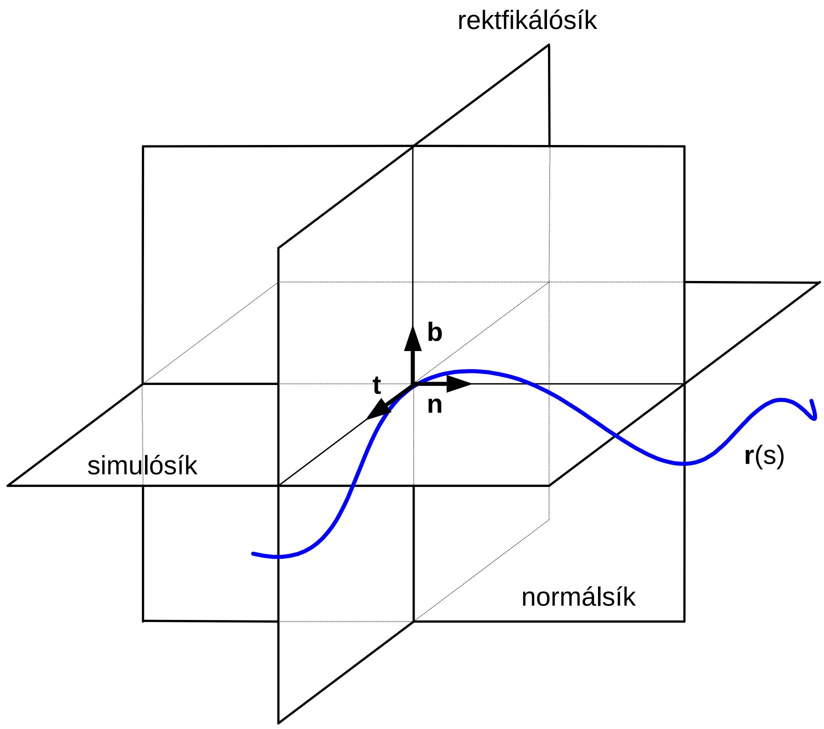
$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}}{\left|\frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}\right|}.$$

A $K = \left|\frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}\right|$ mennyiséget a görbe M pontbeli *görbületének*, a $\rho = 1/\left|\frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}\right|$ mennyiséget pedig *görbületi sugárnak* nevezzük.

Ha egy térgöbe görbülete a térgörbe minden pontjában 0, akkor a görbe egyenes.

A $\mathbf{t}$ érintővektor és az $\mathbf{n}$ főnormális vektor mindig merőleges egymásra. Vegyük hozzájuk harmadikként a $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ egységvektort, amely merőleges $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ síkjára. A $\mathbf{b}$ vektort *binormálisnak* nevezzük.

A $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ vektorhármast a térgörbe M pontbeli kisérő triéderének nevezzük.



A Taylor-sorfejtés szerint a térgörbe másodrendű pontossággal **t** és **n** síkjában fekszik (*simulósík*). Az **n** és **b** síkját *normálsíknak*, **t** és **b** síkját *rektifikálósíknak* nevezzük.

Az $\mathbf{r}(s)$ térgörbe M pontbeli T torzióján (csavarodásán) az

$$T = \frac{1}{\tau} = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}(s_1)}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}\right)^T \frac{d^3\mathbf{r}(s_1)}{ds^3}}{\left|\frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} x'(s_1) & y'(s_1) & z'(s_1) \\ x''(s_1) & y''(s_1) & z''(s_1) \\ x'''(s_1) & y'''(s_1) & z'''(s_1) \end{vmatrix}}{[x''(s_1)]^2 + [y''(s_1)]^2 + [z''(s_1)]^2}$$

számot értjük. Ha $T > 0$, akkor a csavarodást jobbmenetűnek, ha pedig $T < 0$, akkor a csavarodást balmenetűnek nevezzük. Ha a térgörbe minden pontjában $T = 0$, akkor a görbe síkgörbe. A $|\tau|$ számot a torzió sugarának nevezzük.

Példa: Számítsuk ki az $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(a > 0)$ csavarvonal görbületét és torzióját ($b > 0$ jobbcsavar, $b < 0$ balcsavar). Az ivhossz:

$$s = \int_0^t \sqrt{[x'(\lambda)]^2 + [y'(\lambda)]^2 + [z'(\lambda)]^2} d\lambda = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\lambda = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Innen $t = s/\sqrt{a^2 + b^2}$ és a térgörbe ívhossz szerinti paraméterezése:

$$x(s) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y(s) = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z(s) = b\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

A görbület:

$$\begin{aligned}K &= \left|\frac{d^2\mathbf{r}(s_1)}{ds^2}\right| \\ &= \left(\left[\frac{-a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2+\left[\frac{-a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2+0^2\right)^{1/2} \\ &= a/\left(a^2+b^2\right).\end{aligned}$$

A torzió:

$$T=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)^2\begin{vmatrix} -\frac{a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}{a^2+b^2} & -\frac{a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}{a^2+b^2} & 0 \\ \frac{a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}{(a^2+b^2)^{3/2}} & -\frac{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}{(a^2+b^2)^{3/2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)^2\frac{a^2b}{\left(a^2+b^2\right)^3}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Mindkét mennyiség a csavarvonal esetében állandó.

A 3D térben felületeket a következőképpen adhatunk meg:

Descartes koordinátákban:

$$z=z(x,y)\quad\text{(explicit alak)},\quad F(x,y,z)=0\quad\text{(implicit alak)}.$$

paraméteres alakban:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v).$$

vektori alakban:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v).$$

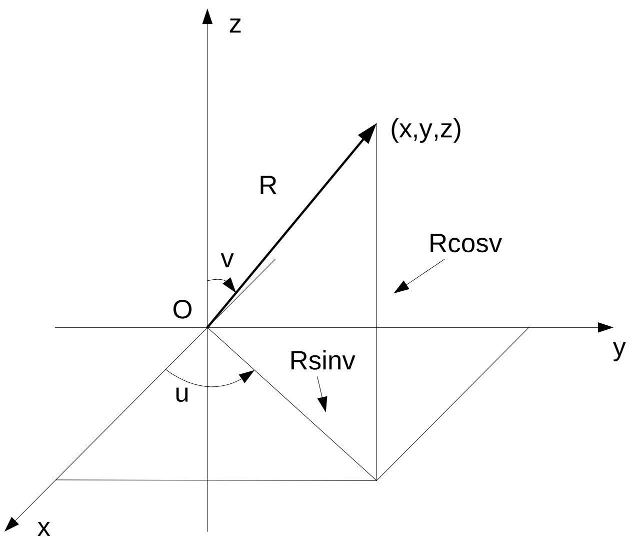
A vektori alak nem más mint

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\,\mathbf{i}+y(u,v)\,\mathbf{j}+z(u,v)\,\mathbf{k}.$$

Példa: A $(0,0,0)^T$ középpontú R sugarú félgömbfelület egyenlete:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2=0\quad(z\geq 0).$$

Ugyanez két paraméteres alakban ($0\leq u\leq 2\pi$, $0\leq v\leq \pi/2$) az



ábra alapján

$$x = R\cos u \sin v, \quad y = R\sin u \sin v, \quad z = R\cos v.$$

Vektor alakban:

$$\mathbf{r} = (R\cos u \sin v)\,\mathbf{i} + (R\sin u \sin v)\,\mathbf{j} + (R\cos v)\,\mathbf{k}.$$

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ az (u, v) paraméter értékek halmaza, (u_0, v_0) pedig rögzített paraméter értékek, amelyek az M pontot definiálják. Az $\mathbf{r}\,(u_0, v)$ $((u_0, v) \in D)$ 3D görbét az $u = u_0$ paraméter értékhez tartozó *u-paraméter, vagy koordinátavonalnak*, az $\mathbf{r}\,(u, v_0)$ $((u, v_0) \in D)$ térgörbét pedig a $v = v_0$ paraméter értékhez tartozó *v-paraméter, vagy koordinátavonalnak* nevezzük (→háló, görbevonalú koordináták).

A felület $M\,(u_0, v_0)$ pontjában a v, u koordinátavonalak érintővektorai:

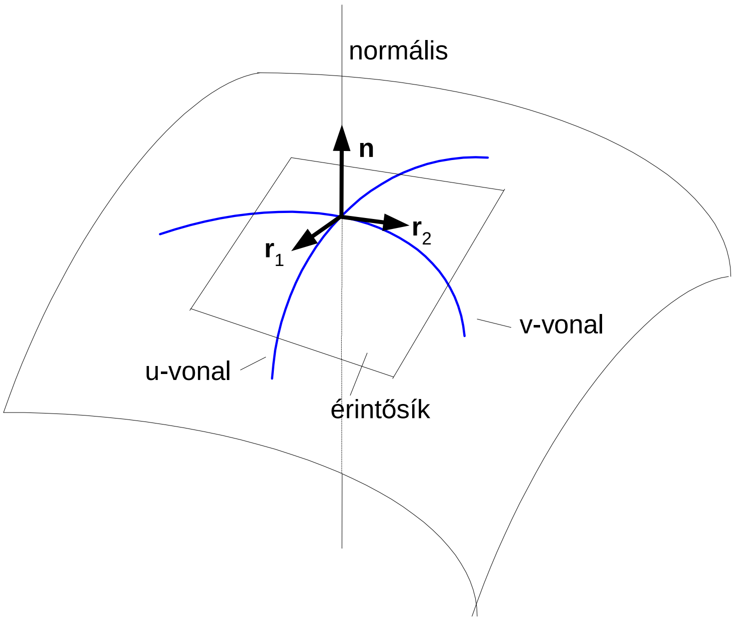
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_u\,(u_0, v_0) = \frac{\partial x\,(u_0, v_0)}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y\,(u_0, v_0)}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z\,(u_0, v_0)}{\partial u}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_v\,(u_0, v_0) = \frac{\partial x\,(u_0, v_0)}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y\,(u_0, v_0)}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z\,(u_0, v_0)}{\partial v}\mathbf{k}.$$

Az $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ vektorok síkja a felület M pontbeli érintősíkja. Az érintősík M pontbeli normális egységvektora $\mathbf{n}$, amellyel $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}$ jobbsodrású rendszert alkot:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}.$$

Ezt mutatja az alábbi ábra:



A felületi ponttól függő $\frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|}$, $\frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|}$, $\mathbf{n}$ vektorhármast *kisérő triédernek* nevezzük.

Definíció: *Legyen D az (u, v) paramétersík korlátos, zárt részhalmaza, $r = r(u, v)$ pedig a D-n értelmezett vektorértékű függvény. A D tartományhoz tartozó $S = \{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$ felületdarab felszínén (felszínmérőszámán) az*

$$F = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, dudv \tag{8.5}$$

integrált értjük (ha létezik).

9. fejezet

Vektor-vektor függvények

$\mathbf{v}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényekkel (vektormezőkkel) foglalkozunk. Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ alapvektorokkal kifejezve:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\,\mathbf{k}. \tag{9.1}$$

A $\phi:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalár függvény *gradiensén* a

$$\operatorname{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

vektor-vektor függvényt értjük.

A $\mathbf{v}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektorfüggvény *divergenciáján* a

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{9.3}$$

skalár függvényt értjük.

Ha az értelmezési tartományon $\operatorname{div}\mathbf{v}$ azonosan 0, akkor a $\mathbf{v}$ vektormezőt *forrásmentesnek* nevezzük.

A $\mathbf{v}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektorfüggvény *rotációján* (angolul *curl*) a

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

vektor-vektorfüggvényt értjük.

Ha az értelmezési tartományon $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ azonosan zérus, akkor a $\mathbf{v}$ vektormezőt *örvénymentesnek* nevezzük.

Példa: O középpontú gravitációs erőtérben az $\mathbf{r} = [x,y,z]^T \neq 0$ pontra ható gravitációs erő:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{-k\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{k}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

A Derive program DIV függvényének alkalmazásával azonnal adódik, hogy $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Hasonlóképpen alkalmazva a CURL (rot) utasítást kapjuk, hogy:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = [0, 0, 0]^T .$$

Tehát a vizsgált gravitációs erőtér forrás- és örvénymentes.

A div, grad és rot műveleteket ötféleképpen kapcsolhatjuk össze: div grad, grad div, div rot, rot grad és rot rot.

Vezessük be a Laplace-operátort:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{9.4}$$

Igazak a következő összefüggések

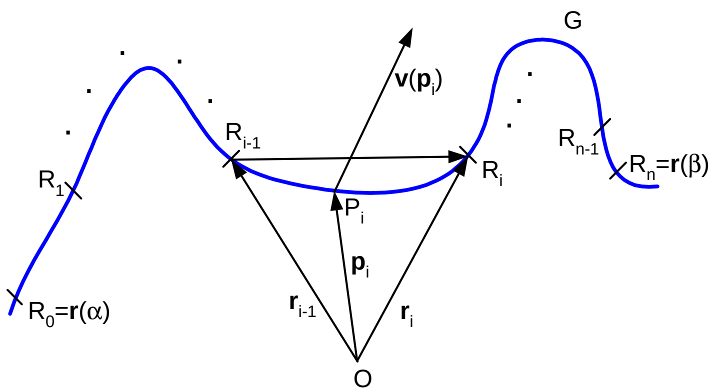
$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0} \quad \left(u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\right), \tag{9.5}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}, \tag{9.6}$$

(ahol a grad és Δ operátorokat komponensenként kell alkalmazni).

Ha a vektormező olyan, hogy $\mathbf{v}(r) = \operatorname{grad} u(\mathbf{r})$, akkor a $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$ összefüggés miatt a vektortér örvénymentes. Ekkor $u(\mathbf{r})$-t a $\mathbf{v}$ vektormező *potenciáljának* nevezzük.

Legyen adott egy $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező és az $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ($t \in [\alpha, \beta]$) térgörbe (G). A *vektormező vonalmenti (skalárértékű) integrálja* a vonal mentén végzett munkát adja meg. Osszuk fel a térgörbét n részre:



Az $R_{i-1}R_i$ görbeíven végzett munka közelítőleg $\mathbf{v}(p_i)^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1})$, az R_0R_n teljes görbeszakaszon pedig

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}(p_i)^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}) .$$

Ha a felosztás minden határon túl finomodik, akkor alkalmas feltételek mellett S_n tart a

$$W = \int_G \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))^T \mathbf{r}'(t)\, dt \tag{9.7}$$

mennyiséghez, amelyet a $\mathbf{v}$ *vektormező G görbe menti skalárértékű integráljának* nevezünk.

Ha a G görbe zárt, akkor szokás a $\oint_G \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ jelölést is használni. Ha G a G_1 és G_2 egymáshoz csatlakozó és G-vel azonosan irányított görbeivekből áll, akkor

$$\int_G \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_{G_1} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} + \int_{G_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}. \tag{9.8}$$

Példa: Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x+y+z)\,\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ és $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (2\cos t)\,\mathbf{i} + (2\sin t)\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Ekkor

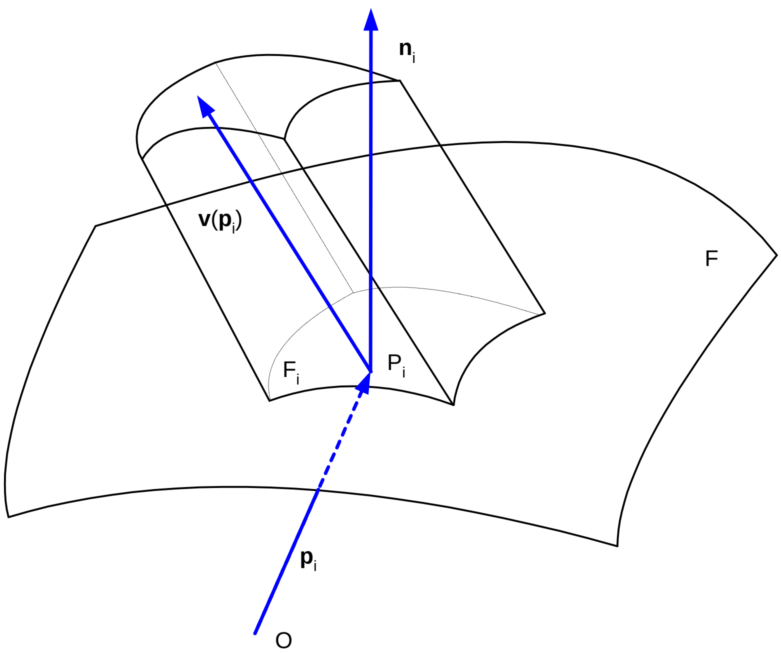
$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) &= (2\cos t + 2\sin t + 4)\,\mathbf{i} + (8\sin 2t)\,\mathbf{j} + \left(4\cos^2 t\right)\mathbf{k},\\ \mathbf{r}'(t) &= (-2\sin t)\,\mathbf{i} + (2\cos t)\,\mathbf{j},\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))^T \mathbf{r}'(t) = -2\sin 2t - 4\sin^2 t - 8\sin t + 16\cos t \sin 2t$$

és

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))^T \mathbf{r}'(t)\, dt = -4\pi.$$

Legyen adott egy $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező és az $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $((u,v) \in D)$ felület (F). A *vektortér felületmenti (skalárértékű) integrálja* az F felületen időegység alatt áthaladó folyadék mennyiségét méri, ha $\mathbf{v}$ az áramlási sebességet adja meg. Bontsuk fel az F felületet a közös belső pont nélküli $F_1, F_2, , F_n$ felületrészekre és ezeken válasszunk ki egy tetszőleges P_i pontot:



Ha F_i felszíne elég kicsi, akkor jó közelítéssel $\mathbf{v}(\mathbf{p}_i)$-nek vehetjük az anyagáramlási sebességet F_i minden pontjában. Időegységalatt a felületdarabon átáramló mennyiség egy hasábszerű testet tölt meg, amelynek magassága $\mathbf{v}(\mathbf{p}_i)^T \mathbf{n}_i$, ahol $\mathbf{n}_i$ a felület áramlás irányába mutató normális egységvektora. Ha ΔF_i-vel jelöljük az F_i felületdarab felszínét, akkor a fenti hasábszerű test térfogata közelítőleg $\mathbf{v}(\mathbf{p}_i)^T \mathbf{n}_i \Delta F_i$, az egész F felületen egységnyi idő alatt áthaladó anyagmennyiség pedig közelítőleg

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}(\mathbf{p}_i)^T \mathbf{n}_i \Delta F_i.$$

Megmutatható, hogy a felosztás finomításával (alkalmas feltételek megléte esetén) a fenti integrálközelítő összeg konvergál a

$$\int_F \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = \iint_D \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))^T (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\, dudv \tag{9.9}$$

mennyiséghez, amelyet a $\mathbf{v}$ *vektormező F felület(ment)i skalárértékű integráljának* nevezünk.

Zárt felület esetén a $\oint_F \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F}$ jelölést is használjuk. A felületi integrál fontosabb tulajdonságai:

$$\int_F c\mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = c\int_F \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} \quad (c \text{ konstans}),$$

$$\int_F [\mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{r})]\, d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{v}_1(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} + \int_F \mathbf{v}_2(\mathbf{r})\, d\mathbf{F},$$

$$\int_{F_1+F_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = \int_{F_1} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} + \int_{F_2} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F},$$

$$\int_F \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = -\int_{-F} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F}.$$

Itt $-F$ jelöli az F felületből a felületi normális irányításának ellenkezőre változtatásával keletkező felületet. Az előjeltől való függést szokás az

$$\int_F \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} = \pm \iint_D \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))^T (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\, dudv$$

formulával is kifejezni.

Példa: Számítsuk ki a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3 = -\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

vektormező felszíni integrálját az origó középpontú egységsugarú G gömbön (befelé mutató normálvektorral):

$$\mathbf{r} = (\sin v \cos u)\,\mathbf{i} + (\sin v \sin u)\,\mathbf{j} + (\cos v)\,\mathbf{k} \quad (0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le \pi).$$

Az egység gömb felszínén ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$ miatt)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = -\left[(\sin v \cos u)\,\mathbf{i} + (\sin v \sin u)\,\mathbf{j} + (\cos v)\,\mathbf{k}\right].$$

Egyszerű számolással:

$$\mathbf{r}'_u = -(\sin v \sin u)\,\mathbf{i} + (\sin v \cos u)\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}'_v = (\cos v \cos u)\,\mathbf{i} + (\cos v \sin u)\,\mathbf{j} - (\sin v)\,\mathbf{k}$$

és

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin v \sin u & \sin v \cos u & 0 \\ \cos v \cos u & \cos v \sin u & -\sin v \end{vmatrix}$$
$$= -\left(\sin^2 v \cos u\right)\mathbf{i} - \left(\sin^2 v \sin u\right)\mathbf{j} - (\sin v \cos v)\,\mathbf{k}.$$

Tehát

$$\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\left(u,v\right)\right)^T\left(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right) = \sin^3 v \cos^2 u + \sin^3 v \sin^2 u + \sin v \cos^2 v$$
$$= \sin^3 v + \sin v \cos^2 v = \sin v$$

és

$$\int_F \mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right) d\mathbf{F} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin v du dv = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \sin v du\right) dv$$
$$= \int_0^{\pi} (2\pi) \sin v dv = 2\pi \left[-\cos v\right]_0^{\pi} = 4\pi.$$

Fontos szerepe van a vektormezők vizsgálatában és az alkalmazásokban az integrálátalakítási tételeknek, amelyek közül a két legfontosabbat említjük meg.

Tétel *(Stokes): Ha a zárt G görbével határolt F felületen a v vektormező rotációja létezik, akkor*

$$\int_F \operatorname{rot}\,\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right) d\mathbf{F} = \oint_G \mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right) d\mathbf{r}, \tag{9.10}$$

feltéve, hogy a két integrál is létezik.

Tétel *(Gauss-Osztrogradszkij): Ha a zárt F felülettel rendelkező V térbeli tartományon a v vektorfüggvény divergenciája létezik, akkor*

$$\int_V \operatorname{div}\,\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right) dv = \oint_F \mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right) d\mathbf{F}, \tag{9.11}$$

feltéve, hogy a két integrál létezik és az F felület normálvektora kifelé mutat.

Példa: Ellenőrizzük a Gauss-Osztrogradszkij tételt a $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormező és az origó középpontú egységsugarú gömb esetén. A $V = \left\{[x,y,z]^T \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$ gömböt határoló zárt $F = \left\{[x,y,z]^T \mid x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ felület két paraméteres alakja

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(u,v\right) = \begin{bmatrix} \sin v \cos u \\ \sin v \sin u \\ \cos v \end{bmatrix} \quad \left(0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq \pi\right).$$

Minthogy div $\mathbf{v}$ =3, azért $\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, dv = 3\int_V dv = 4\pi$. A vektormező lokalizációja az F felületen:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (\sin v \cos u)\,\mathbf{i} + (\sin v \sin u)\,\mathbf{j} + (\cos v)\,\mathbf{k}.$$

Korábban láttuk, hogy

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = -\left(\sin^2 v \cos u\right)\mathbf{i} - \left(\sin^2 v \sin u\right)\mathbf{j} - (\sin v \cos v)\,\mathbf{k}.$$

Ez azonban befelé mutat, tehát (-1)-szeresét kell vennünk. Így kapjuk, hogy

$$-\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v))^T (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) = \sin v$$

és

$$\begin{aligned}\oint_F \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{F} &= -\int_F \mathbf{v}\left[\mathbf{r}(u,v)\right]^T \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v du dv \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin v du dv = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \sin v du\right) dv \\ &= \int_0^{\pi} (2\pi)\sin v dv = 2\pi\left[-\cos v\right]_0^{\pi} = 4\pi.\end{aligned}$$

Tehát a Gauss-Osztrogradszkij tételt sikeresen ellenőriztük az adott példán.

10. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

Parciális differenciálegyenletek számos fizikai, műszaki, biológiai probléma modellezésénél előfordulnak. Tanulmányozásuk a XVIII. században kezdődött.

A parciális differenciálegyenlet (PDE) olyan egyenlet, amelyben egy két- vagy többváltozós ismeretlen függvény legalább egyik parciális deriváltja szerepel.

Az elsőrendű PDE-k implicit alakja a kétváltozós $z = z(x, y)$ függvény esetén:

$$F\left(x, y, z'_x, z'_y\right) = 0,$$

ahol F adott függvény. Az n-változós esetben esetben ugyanez:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z'_{x_1}, \ldots, z'_{x_n}\right) = 0,$$

ahol $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ és F egy $2n$ változós adott függvény.

A másodrendű PDE-k implicit alakja kétváltozós esetben:

$$F\left(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}\right) = 0, \quad z = z(x, y).$$

Fontos szerepet játszanak a lineáris PDE-k.

Az *elsőrendű lineáris inhomogén* PDE-k általános alakja 2D esetben:

$$f_1(x, y)\, z'_x + f_2(x, y)\, z'_y + f_0(x, y)\, z + f(x, y) = 0, \quad z = z(x, y),$$

ahol f_0, f_1, f_2, f adott függvények. Ha $f(x, y) \equiv 0$, akkor a PDE *homogén.*

A *másodrendű lineáris inhomogén* PDE-k általános alakja (2D):

$$\begin{aligned} &a(x, y)\, z''_{xx} + b(x, y)\, z''_{xy} + c(x, y)\, z''_{yy} + \\ &\qquad + d(x, y)\, z'_x + e(x, y)\, z'_y + f(x, y)\, z + g(x, y) = 0, \quad z = z(x, y), \end{aligned}$$

ahol a, b, c, d, e, f, g adott függvények. Ha $g(x, y) \equiv 0$, akkor a PDE *homogén.*

Legyen $D(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)\, c(x, y)$ a másodrendű PDE diszkriminánsa. Ha egy (x, y) tartományban $D(x, y) > 0$, akkor a PDE-t *hiperbolikusnak* nevezzük. Ha $D(x, y) < 0$, akkor a PDE *elliptikus.* A $D(x, y) = 0$ esetet *parabolikusnak* nevezzük.

A PDE-k megoldása sokkal nehezebb mint a közönséges d.e.-ké a lényegesen eltérő tulajdonságaik miatt.

Például tudjuk, hogy egy n-edrendű homogén lineáris d.e.-nek n független megoldása lehet és az általános megoldás n független konstanst tartalmaz. Tekintsük most a

$$2z'_x - z'_y = 0$$

homogén lineáris PDE-t. Ennek tetszőleges differenciálható f függvény esetén a

$$z = f\,(x + 2y) \tag{10.1}$$

függvény megoldása, ui. $z'_x = f'\,(x + 2y)$, $z'_y = 2f'\,(x + 2y)$. Most igazoljuk, hogy (10.1) valóban a legáltalánosabb megoldás. Vezessük be az új $t = x + 2y$ és $s = x$ változókat! Ekkor

$$z'_x = z'_t t'_x + z'_s s'_x = z'_t + z'_s, \quad z'_y = z'_t t'_y + z'_s s'_y = 2z'_t$$

miatt

$$2z'_x - z'_y = 2z'_s = 0.$$

A $2z'_s = 0$ egyenlet általános megoldása: $z = f\,(t) = f\,(x + 2y)$.

Vizsgáljuk most a homogén másodrendű

$$az''_{xx} + bz''_{xy} + cz''_{yy} = 0 \tag{10.2}$$

PDE-t, ahol a, b, c konstans. Keressük ennek általános megoldását

$$z = f\,(y + mx)$$

alakban, ahol f kétszer differenciálható tetszőleges függvény. Behelyettesítve az

$$z''_{xx} = m^2 f''\,(y + mx)\,, \quad z''_{xy} = mf''\,(y + mx)\,, \quad z''_{yy} = f''\,(y + mx)$$

kifejezéseket a fenti PDE-be kapjuk, hogy

$$\left(am^2 + bm + c\right) f''\,(y + mx) = 0.$$

Innen azonnal kapjuk, az $am^2 + bm + c = 0$ feltételt, amelyet m-nek teljesítenie kell.

Ha két különböző gyök ($m_1 \neq m_2$) van, akkor a linearitás miatt bármely

$$z = f\,(y + m_1 x) + g\,(y + m_2 x) \tag{10.3}$$

alakú függény megoldása a fenti PDE-nek (feltéve, hogy g is kétszer differenciálható). Ha bevezetjük az $s = y + m_1 x$ és $t = y + m_2 x$ új változókat, akkor a (10.2) PDE átmegy a $z''_{st} = 0$ alakba. Ebből viszont következik, hogy (10.3) valóban a legáltalánosabb megoldás.

Ha $m_1 = m_2$, akkor a következőképpen járunk el. Tegyük fel először, hogy $m_1 \neq m_2$. Ekkor

$$\frac{h\,(y + m_1 x) - h\,(y + m_2 x)}{m_2 - m_1}$$

megoldása a (10.2) PDE-nek. Ha $m_2 \to m_1$, akkor ez a megoldás konvergál a

$$[h'_m (y + mx)]_{m=m_1} = xh' (y + m_1 x)$$

értékhez. A $g = h'$ helyettesítéssel, kétszeres gyök esetén (10.2) általános megoldása:

$$z = f (y + m_1 x) + xg (y + m_1 x) . \tag{10.4}$$

Példa: $z''_{xx} - 3z''_{xy} + 2z''_{yy} = 0$ esetén $m^2 - 3m + 2 = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ és az általános megoldás: $z = f (x + y) + g (2x + y)$ (hiperbolikus PDE). A $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$ PDE esetén $m^2 - 2m + 1 = 0$, $m_1 = m_2 = 1$ és az általános megoldás: $z = f (x + y) + xg (x + y)$ (parabolikus PDE).

Az elliptikus típusú

$$\Delta z = z''_{xx} + z''_{yy} = 0 \tag{10.5}$$

Laplace-egyenlet esetén $m^2 + 1 = 0$, $m_1 = i$, $m_2 = -i$ és az általános megoldás alakja:

$$z = f (x + iy) + g (x - iy) . \tag{10.6}$$

Habár egy PDE-nek végtelen sok megoldása lehet, különféle kiegészítő (kezdeti és perem) feltételekkel a megoldás egyértelművé tehető.

10.1. Speciális másodrendű parciális differenciálegyenletek

Fontos fizikai problémák közös modellje az

$$\Delta\phi + f = \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{10.7}$$

alakú PDE, ahol f a hely függvénye, λ és μ fizikai konstansok.

A *Laplace-egyenlet*:

$$\Delta\phi = 0.$$

A *Poisson-egyenlet*:

$$\Delta\phi + f = 0.$$

A *hullámegyenlet (rezgő húr, D'Alembert egyenlete)*:

$$\Delta\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

A *hővezetés (diffúzió) egyenlete*:

$$\Delta\phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

A rezgő húr egyenlete

Vizsgáljuk a két végén befogott homogén és rugalmas rezgő húr (mozgás) egyenletét (1D hullámegyenlet):

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad (c > 0 \text{ konstans}) \tag{10.8}$$

a

$$\phi(x,0) = F(x), \quad \phi_t'(x,0) = G(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{10.9}$$

kezdeti feltételek mellett. A fenti hiperbolikus típusú PDE általános megoldása:

$$\phi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \tag{10.10}$$

amelynek ki kell elégítenie az

$$\phi(x,0) = f(x) + g(x) = F(x), \quad \phi_t'(x,0) = c\left[f'(x) - g'(x)\right] = G(x) \tag{10.11}$$

feltételeket minden x értékre. A második feltételből integrálással kapjuk, hogy

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x G(\xi)\,d\xi. \tag{10.12}$$

Ebből és az első feltételből azonnal kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x G(\xi)\,d\xi,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x G(\xi)\,d\xi.$$

Ezeket behelyettesítve az általános megoldásba kapjuk a rezgő húr (1D hullámegyenlet) kezdeti feltételeket is kielégítő megoldását:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+ct) + F(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\xi)\,d\xi. \tag{10.13}$$

Megjegyezzük, hogy ez a megoldás D'Alembert-től származik.

A feladatot a változók szétválasztásának módszerével is megoldhatjuk, amelyre példát a következő esetben látunk.

A $\phi(x,t) = f(x+ct)$ megoldás egy görbét reprezentál, amely negatív x irányban mozog c sebességgel. Hasonlóképpen a $\phi(x,t) = g(x-ct)$ egy olyan görbét reprezentál, amely pozitív x irányban mozog c sebességgel. Ezért, általános értelemben beszélhetünk hullámterjedésről is.

Példa: Keressük a

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad (c > 0 \text{ konstans}) \tag{10.14}$$

$$\phi(x,0) = x^2, \quad \phi_t'(x,0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{10.15}$$

feladat megoldását! A képlet alapján

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \frac{1}{2}\left[(x+ct)^2+(x-ct)^2\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\cos\xi d\xi\\
&= x^2+c^2t^2+\frac{1}{2c}\left[\sin\xi\right]_{x-ct}^{x+ct}\\
&= x^2+c^2t^2+\frac{1}{2c}\left[\sin(x+ct)-\sin(x-ct)\right]\\
&= x^2+c^2t^2+\frac{1}{2c}\left[\sin x\cos ct+\cos x\sin ct-\sin x\cos ct+\cos x\sin ct\right]\\
&= x^2+c^2t^2+\frac{1}{c}\cos x\sin ct.
\end{aligned}$$

D'Alembert klasszikus módszere a most vizsgáltaknál általánosabb feladatokon is használható.

A Laplace egyenlet

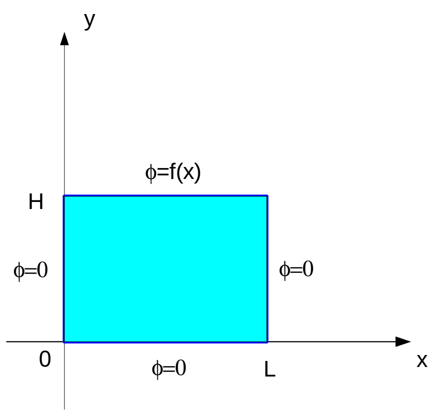
A kétváltozós

$$\Delta\phi=\phi''_{xx}+\phi''_{yy}=0 \tag{10.16}$$

Laplace egyenlet megoldását vizsgáljuk a $0\le x\le L$, $0\le y\le H$ téglalapon a következő kikötésekkel:

$$\phi(0,y)=\phi(L,y)=\phi(x,0)=0,\quad \phi(x,H)=f(x). \tag{10.17}$$

Ez a kezdeti érték feladat egy hővezetési feladatot ír le, ahol a téglalap három oldalán a hőmérséklet 0, a negyediken pedig $f(x)$:



Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét, ami azt jelenti, hogy a megoldást a

$$\phi(x,y)=X(x)Y(y)$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve a $\Delta\phi=0$ egyenletbe kapjuk, hogy

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0,$$

ahonnan átrendezéssel

$$-\frac{1}{X(x)}X''(x) = \frac{1}{Y(y)}Y''(y) = k^2 = \text{konstans}$$

adódik. Kifejtve kapjuk a

$$X''(x) + k^2X(x) = 0, \quad Y''(y) - k^2Y(y) = 0$$

közönséges d.e.-ket. Figyelembevéve, hogy a kezdeti feltételekből $X(0) = X(L) = Y(0) = 0$ következik, ezen d.e.-k megoldásai

$$X = X_n = A_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad Y = Y_n = B_n \sinh\frac{n\pi y}{L}$$

alakban írhatók fel. Tehát a PDE egy partikuláris megoldása

$$\phi = \phi_n = a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

alakú ($a_n = A_nB_n$) és kielégíti az első három peremfeltételt. Ez teljesül a

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}$$

sorra is, ha az alkalmas módon konvergál. A negyedik peremfeltételt ez a ϕ akkor teljesíti, ha

$$\phi(x, H) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sinh\frac{n\pi H}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (0 < x < L).$$

A Fourier-sorok elmélete alapján

$$a_n \sinh\frac{n\pi H}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx =: c_n,$$

ahonnan a feladat megoldása (a sorok konvergenciáját feltételezve):

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sinh\frac{n\pi H}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}.$$

Példa: Legyen $L = H = 100$ cm és $f(x) = 100°$. Ekkor a fenti képlet alapján

$$c_n = \frac{2}{100}\int_0^{100} 100\sin\frac{n\pi x}{100}dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k \\ 400/(\pi n), & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases}$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \sum_{n \text{ páratlan}}\frac{\frac{400}{\pi n}}{\sinh(n\pi)}\sin\frac{n\pi x}{100}\sinh\frac{n\pi y}{100} \\ &= \frac{400}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{100}}{(2k+1)\sinh((2k+1)\pi)}\sinh\frac{(2k+1)\pi y}{100}.\end{aligned}$$

Feladat: Igazoljuk, hogy a hőmérséklet a lemez centrumában 25°!

11. fejezet

Javasolt irodalom

B. Davies: Integráltranszformációk és alkalmazásaik, Műszaki Könyvkiadó, 1983

Fekete Z. - Zalay M., Többváltozós függvények analízise példatár, Műszaki Könyvkiadó, 2000

Gáspár Gy. (szerk.): Műszaki matematika I., II., III., IV., VI, Tankönyvkiadó, 1968 (több kiadásban)

F.B. Hildebrand: Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall, 1962

E. Kamke: Differentialgleichungen: Lösungmethoden und Lösungen, Akademische Verlagsgeselschaft, Leipzik, 1959

G.M. Murphi: Ordinary Differential Equations and Their Solutions, Van Nostrand, 1960

G.A. Korn-T.M. Korn: Matematikai kézikönyv műszakiaknak, Műszaki Könyvkiadó, 1975

A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev: Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd edition, CRC Press, 2002

Scharnitzky Viktor: Vektorgeometria és lineáris algebra, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996

Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, 1975

Szász Gábor: Matematika I-III, Tankönyvkiadó, 1990

Szarka Zoltán: Alkalmazott matematika (Parciális differenciálegyenletek), Tankönyvkiadó, 1991