3. előadás
adalék

Forrás:

Ésik Zoltán

Logika a számítástudományban

Rezolúciós stratégiák összefoglaló

- Klózhalmazt (diszjunkciókat) kell létrehoznunk
  - Pl. mint egy szemantikus következmény levezetésekor:

    {formulahalmaz}$\rightarrow$F (igaz)

    $\leftrightarrow\neg$ {formulahalmaz} $\vee$F (igaz)

    $\leftrightarrow$ {formulahalmaz} $\wedge\neg$F (hamis), vagy
  - Pl. hogy bizonyítsuk, hogy egy formulahalmaz kielégíthetetlen.

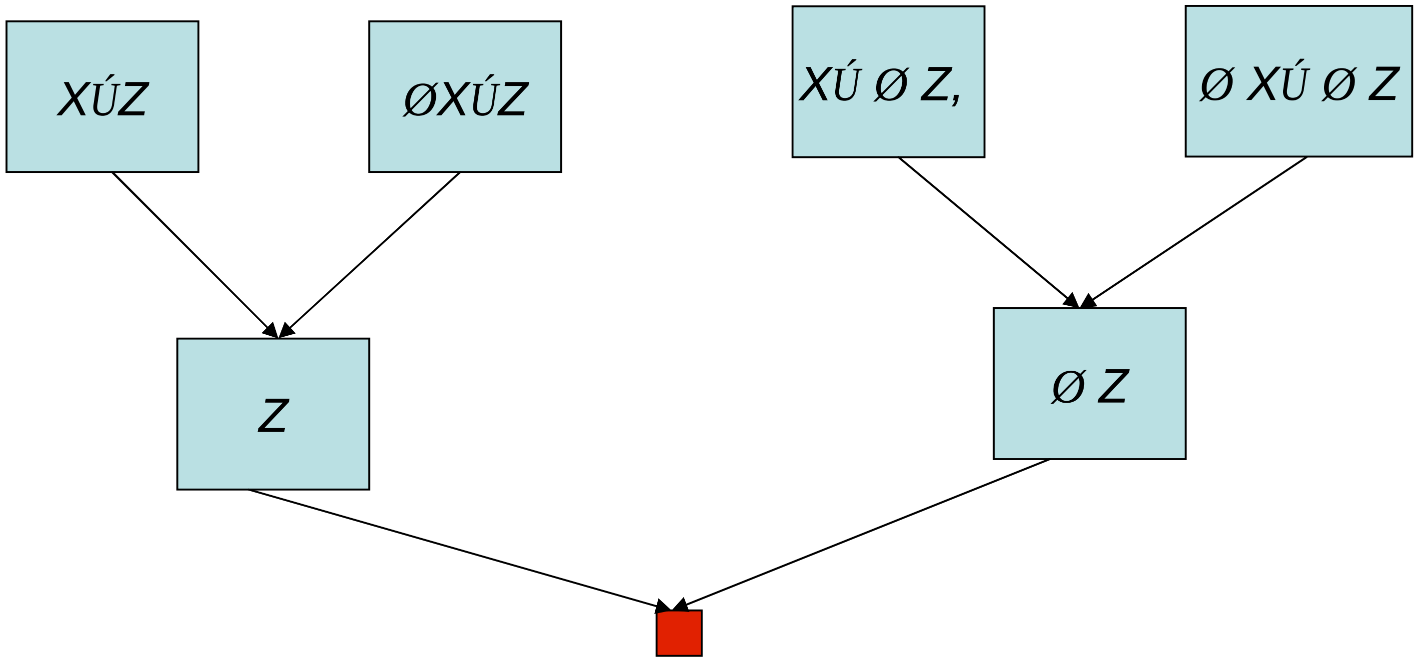
Fontos megjegyzések:

- Rezolúciós elv,
- Fontos példák:

klózpár	rezolvense
$X \vee Y, \neg Y \vee Z$	$X \vee Z$
$X \vee \neg Y, \neg Y \vee Z$	Nincs, mindkét azonos alapú literál negált
$X \vee \neg Y, Z \vee \neg V$	Nincs, nincs azonos alapú literál
$\neg X \vee \neg Y, X \vee Y \vee Z$	Nincs, két komplemens literálpár van
$X, \neg X$	Üres klóz
$\neg X \vee Y, X$	Y (mert a klózpárt így is írhatjuk: $\neg X \vee Y, X \vee$ hamis, azaz a rezolvense (hamis $\vee$ Y) ami Y)

Példa: vezessük le különböző rezolúciós stratégiákkal az üres klózt az *{XÚZ,ØXÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z}*

formulahalmazból



Példa: vezessük le levezetési (lineáris) fával

{XÚZ,ØXÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z}

Használjuk fel sorban a klózokat és a kapott (centrális) rezolvenseket

XÚZ,ØXÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z

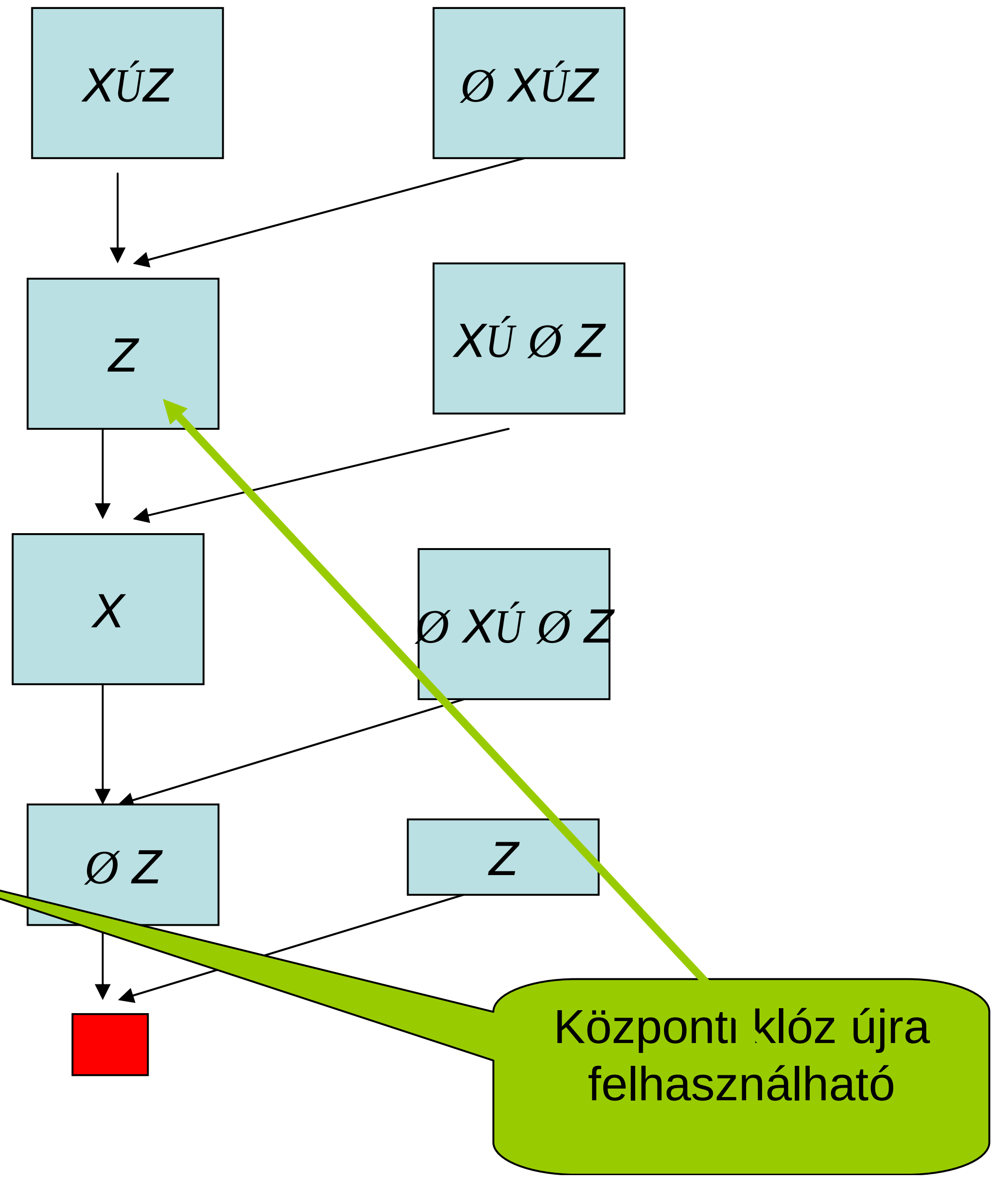
XÚZ,Ø XÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z

XÚZ, Ø XÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z, Z

XÚZ,Ø XÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z,Z

XÚZ, Ø XÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z, Z,X

XÚZ, Ø XÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z, Z,X



Bővítés: a lineáris rezolúcióról (központi klóz újra felhasználható)

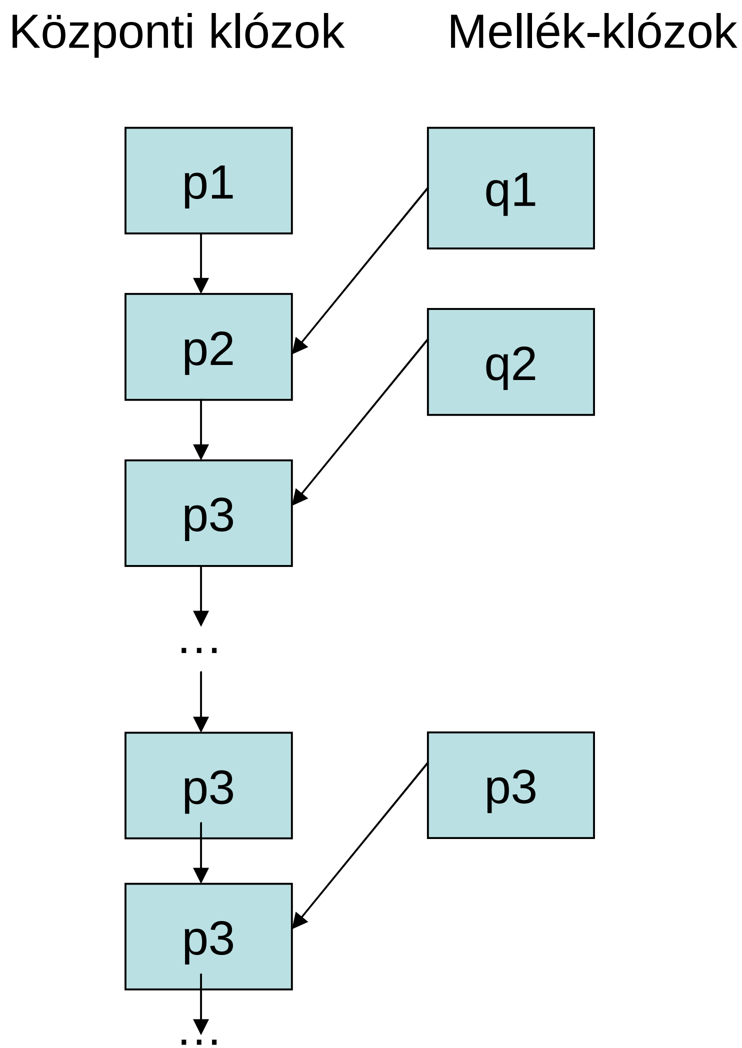
- ***S*** klózhalmazból való **rezolúciós levezetés** egy olyan c_1, c_2, ...c_j,... klózsorozat, ahol $c_j \in S$ vagy c_j rezolvense (c_s,c_t) klózoknak, és s,t<j (azaz c_s, c_t "megelőzik" a c_j rezolvenst).
- A levezetés **célja az üres klóz**.

- **Lineáris rezolúciós levezetés** egy S klózhalmazból egy olyan p_1, q_1, p_2, q_2 ...p_n, q_n klózsorozat, ahol $p_1, q_1 \in S$.
- a további levezetéskor (azaz i=2, 3,...,n esetben) p_i a (p_{i-1},q_{i-1}) rezolvense ahol

  $q_{i-1} \in S$ vagy

  (s<i-1)-re valamely (p_s, q_s) párnak a rezolvense (azaz egy korábban megkapott ***centrális klóz***).

Lineáris rezolúciós levezetést ábrázoló levezetési fa



Azaz az eredeti S klóz-halmazból a lin. rezolúcióval levezetett központi klózok csatlakoztathatók a felhasználandó klózokhoz.

Megjegyzés

- **Lineáris input** rezolúciós levezetésnél csak egyszer használjuk fel az eredeti klózokat
- Egy S klózhalmazból való **lineáris input** rezolúciós levezetés egy olyan p_1, q_1, p_2, q_2 ... p_n, q_n klózsorozat, ahol $q_n \in S$ (mellék-, vagy oldalklóz) minden i-re. Fontos: $p_1 \in S$, de p_i a p_{i-1}, q_{i-1} rezolvense ha i>2.
- A **lineáris rezolúció** teljes, a **lineáris input**-rezolúció (egység rezolúció) nem teljes.

Vezessük le lépésenként!

{XÚZ,ØXÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z}=F

1.	**XÚZ**	**mert XÚZ Î F**
2.	**ØXÚZ**	**mert ØXÚZ Î F**
3.	**Z**	**mert 1. és 2. rezolvense**
4.	**XÚ Ø Z**	**mert XÚ Ø Z Î F**
5.	**X**	**mert 3. és 4. rezolvense**
6.	**Ø XÚ Ø Z**	**mert Ø XÚ Ø Z Î F**
7.	**Ø Z**	**mert 5. és 6. rezolvense**
8.	à	**mert 3. és 7. rezolvense**

Horn formulák
Hilbert axiómák

Horn formula 1

Horn formula egy olyan $F = C_1 \wedge ,\ldots, \wedge C_n$ konjunktív normálforma, melyben minden

C_i tag legfeljebb egy pozitív literált tartalmaz.

Megjegyzés

$\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k \vee q \equiv (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k) \rightarrow q$

$\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k \equiv (q_1 \wedge \ldots \wedge q_k) \rightarrow \text{igaz}$

- Ha $k = 0$, akkor

$q \equiv \text{igaz} \rightarrow q$ és

$\text{hamis} \equiv \text{igaz} \rightarrow \text{hamis}$

Hilbert rendszere, 1

Olyan formulákat tekintünk, amelyekben nem fordul elő:
$\wedge, \vee, \leftrightarrow, \neg$ és az *igaz* (jelölje $\uparrow$).

Hilbert Axiómák

- 1. $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$
- 2. $F \rightarrow (G \rightarrow F)$
- 3. $((F \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow F$, ahol $\downarrow$ a *hamis*-t jelöli

ahol F, G, H tetszőleges formulák.

Szabály: leválasztás, vagy modus ponens

$$\frac{F,\ F \rightarrow G}{G}$$

ahol F, G tetszőleges formulák.

Definíció: Az érvényesség Hilbert-féle bizonyításának vagy levezetésnek nevezzünk egy olyan

$F_1, F_2, \ldots. F_n$

sorozatot, ahol az F_i formulák mindegyike

1. axióma, vagy
2. előáll az őt megelőző formulákból leválasztással.

Azt mondjuk, hogy F bizonyítható, vagy levezethető, ha létezik olyan $F_1, F_2, \ldots. F_n$ bizonyítás, melyre $F = F_n$. Jelölése: $\vdash_H F$

Hasonlóképpen egy Σ formulahalmazra:

Definíció: A Σ formulahalmaz feletti Hilbert-féle bizonyításának vagy levezetésnek nevezzünk egy olyan

$F_1, F_2, \ldots. F_n$

sorozatot, ahol az F_i formulák mindegyike

1. axióma, vagy
2. Σ -beli formula vagy
3. előáll az őt megelőző formulákból leválasztással.

Azt mondjuk, hogy F bizonyítható, vagy levezethető a Σ felett, ha létezik olyan $F_1, F_2, \ldots. F_n$ bizonyítás, melyre $F = F_n$. Jelölése: $\Sigma \vdash_H F$

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\vdash_H (F \rightarrow F)$, azaz hogy levezethető az $F \rightarrow F$ formula, bármely F formulára

Legyen $G = F \rightarrow F$.

1. $F \rightarrow (G \rightarrow F)$, (Ax 2)

2. $F \rightarrow G$, (Ax 2)

3. $(F \rightarrow (G \rightarrow F)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow F))$, (Ax 1)

4. $(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow F)$, (1. és 3., MP-szel)

5. $F \rightarrow F$, (2. és 4., MP-szel)

Tehát teszőleges F-re: $\vdash_H (F \rightarrow F)$.

Megjegyzés: további példák a forrásban megjelölt anyagban.

Emlékeztető:

- Szemantikai következmény

Legyen P zárt formulahalmaz. F lezárt formula a P logikai következménye,akkor és csak akkor, ha F igaz P minden modelljében.Jelölése: P |= F

- Szintaktikus levezethetőség

Ha az F következményt formális úton, a következtetési szabályok alkalmazásával állítjuk elő, következtetési lépések sorozatán keresztül növelve a premissza-formulák P halmazát, akkor F levezethető P-ből.Jelölése: P |– F.

- Helyesség és teljesség (soundness & completeness)

Következtetési szabályok valamely halmaza **helyes** (sound), ha minden P zárt formulahalmazra és F zárt formulára, ha P |– F, akkor P |= F. Következtetési szabályok valamely halmaza **teljes** (complete), ha minden P zárt formulahalmazra és F zárt formulára, ha P |= F, akkor P |– F.

Hilbert rendszerének helyessége és teljessége

Emlékeztető:

Tétel: Tetszőleges formula halmazra és F formulára

$\models$ F

akkor es csak akkor, ha

$\vdash_H$ F.