Logika

2. előadás

Nulladrendű logika (ítéletkalkulus)

Formalizált nyelv: szintaxis és szemantika

Szintaxis:

- Jelkészlet
- Formulaképzés szabályai

Szemantika:

- A helyes szintaxisú formulák jelentése

Szintaxis

Jelkészlet:

1. Betűk (ítéletváltozók)-atomok *(p,q,r,…)*

2. ¬, ∧, ∨, (→,↔…)

3. I, H (1,0)-atomok

4. Zárójelek

Formula

- Minden atom formula
- Ha α, β formula akkor $\neg\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$ is formulák
- a fenti két szabály **véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat.**

Formulák

- A formulákban zárójelezéssel hangsúlyozhatjuk a műveleti prioritásokat
- A magyar kisbetűkkel az atomi formulákat, a görög betűkkel (vagy nagybetűkkel) az összetett formulákat jelöljük általában.
- Az alapformulák halmaza szűkíthető, hiszen pl. $\neg\alpha \lor \beta$ és $\alpha \to \beta$ kiértékelése megegyezik.

Szemantika

- A jelkészlet elemeit értelmezzük.
- A betűk az ún. ítéletváltozók.
- **Ítélet:** a köznapi nyelv kijelentő mondatainak, kijelentéseinek felelnek meg. A klasszikus logikában csak olyan kijelentésekre gondolunk, amelyek **igaz** vagy **hamis** volta egyértelműen eldönthető. Ezáltal egyfajta ítéletet képviselnek e mondatok.
- **Változók:** mert az eredeti kijelentés tartalmától függetlenül, csakis annak igazságértékeit vehetik fel: az igaz, vagy a hamis értékek valamelyikét.
- Az igazságértékek tehát az ítéletváltozók lehetséges értékei, jelöljük ezek a halmazát I- -vel.
- I- csak a klasszikus logikában kételemű halmaz.

Szemantika

- Azt a függvényt, amely a betűkkel jelölt változókhoz hozzárendeli a lehetséges igazságértékek valamelyikét, **interpretációnak hívjuk.**
- Az interpretációkat az **igazságtáblába** foglaljuk, amelynek *n* változó esetében 2^n sora van.
- Az I és H rögzített igazságértékű (Igaz, Hamis)- **ítélet-konstansok.**

- **Az I betű igazságértéke minden interpretációban legyen igaz, a H betű igazságértéke minden interpretációban legyen hamis. A többi ítéletváltozó esetében az igazságérték az interpretációtól függ.**
- A zárójelek értelmezése és használata a matematikában szokásos módon történik: lényegében a műveletek kiértékelési sorrendjét tudjuk általuk meghatározni.
- **A $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ... jelek az igazságértékeken értelmezett műveleteknek felelnek meg.**
- **A műveletek definícióját tekinthetjük kiértékelésnek, kiértékelési szabálynak.**

IGAZSÁGTÁBLÁK,
Alapformulák szemantikája

Egyváltozós művelet

- **Negáció (tagadás):**

Igazságtáblázat:

Ítéletváltozó	Ítéletváltozó tagadása
A	¬A
Igaz	Hamis
Hamis	Igaz

Kétváltozós műveletek

Konjunkció

- A∧B: informális jelentése: **és**.
- Példa: hat osztható kettővel **és** hat osztható hárommal
- A mondat „formalizálása”:

P: hat osztható kettővel

Q: hat osztható hárommal

hat osztható kettővel **és** hat osztható hárommal: *P*∧*Q*

- Mikor gondoljuk igaznak ezt a két kijelentés összetételével kapott mondatot?
- A konjunkció akkor és csak akkor igaz, ha mindkét változó igazságértéke igaz.

Ítéletváltozók		Formula
A	B	A∧B
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	H
interpretáció		kiértékelés

Diszjunkció

- $A \vee B$: informális jelentése: **vagy** .
- Példa: hat osztható kettővel **vagy h**at osztható hárommal
- A mondat „formalizálása”:

P: hat oszthtó kettővel

Q: hat osztható hárommal

hat osztahó kettővel **vagy** hat osztható hárommal: $P \vee Q$

- Mikor gondoljuk igaznak ezt a *két kijelentés összetételével* kapott mondatot?
- A diszjunkció akkor és csak akkor hamis, ha mindkét változó igazságértéke hamis.

Igazságtábla		
A	B	$A \vee B$
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H
Ítéletváltozók		kiértékelés

Implikáció

- A→B : i**nformális jelentése: ha A, akkor B.**
- Példa: Ha az iskolai tanulmányai alatt a hallgató minden félévben legalább jeles átlageredményt ért el, akkor az állam egy aranygyűrűt ad ajándékba a diploma kiosztásakor.
- Formalizáljuk ezt a mondatot!

- Mikor gondoljuk igaznak ezt a két kijelentés összetételével kapott mondatot?
- Az implikáció akkor és csak akkor hamis, ha az első operandusa (előtagja, feltétele) igaz, a második operandusa (utótagja, következménye) hamis.

Igazságtábla		
A	B	A→B
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I
Ítéletváltozók		kiértékelés

- **Ekvivalencia (mint logikai művelet)**
- Jelentése A akkor és csak akkor ha B, jelölése $A \leftrightarrow B$
- mint művelet az implikációból és a konjunkcióból származtatható:

Def.: $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

- Az $A \leftrightarrow B$ ekvivalencia csak akkor igaz, ha A és B igazságértéke ugyanaz.

Megjegyzés: Az alapjelkészletben nem kell szerepelnie a ↔ jelnek, hiszen definícióban megadott formula rövidítéseként vezettük be.

Igazságtábla		
A	B	$A \leftrightarrow B$
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	I
Ítéletváltozók		kiértékelés

Kérdés:

Bevezethetőek-e további kétváltozós műveletek?
Igen, pl. a kizárólagos vagy (nem igaz, ha mindkét állítás igaz)

Mitől függ az interpretációs sorok száma?
A változók számától.

1. példa:
Adja meg az $((A \lor B) \land C) \to (A \land \neg B)$ formula kiértékelését minden interpretációban!

A	B	C	$(A \lor B)$	$(A \lor B) \land C)$	$(A \land \neg B)$	$((A \lor B) \land C) \to (A \land \neg B)$
I	I	I	I	I	H	H
I	I	H	I	H	H	I
I	H	I	I	I	I	I
I	H	H	I	H	I	I
H	I	I	I	I	H	H
H	I	H	I	H	H	I
H	H	I	H	H	H	I
H	H	H	H	H	H	I

2. példa:
Adja meg az $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$ formula kiértékelését minden interpretációban!

A	B	C	$(A \vee B)$	$(A \vee C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \leftrightarrow A \vee (B \wedge C)$
I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	I	I	H	I	I
I	H	I	I	I	I	H	I	I
I	H	H	I	I	I	H	I	I
H	I	I	I	I	I	I	I	I
H	I	H	I	H	H	H	H	I
H	H	I	H	I	H	H	H	I
H	H	H	H	H	H	H	H	I

3. példa:
Adja meg az $(\neg (A \rightarrow B)) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ formula kiértékelését minden interpretációban!

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg (A \rightarrow B)$	$(A \wedge \neg B)$	$\neg((A \rightarrow B)(\leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
I	I	I	H	H	I
I	H	H	I	I	I
H	I	I	H	H	I
H	H	I	H	H	i

4. példa:

Adja meg az $(\neg A) \wedge A$ formula kiértékelését minden interpretációban!

A	Ø **A**	**(**Ø **A)**Ù**A**			
I	H	H			
I	H	H			
H	I	H			
H	I	H			

Tautológia, ellentmondás, modell

- **Def.: Tautológia (azonosan igaz formula, érvényes formula):**

Az a formula, amely minden interpretációban igaz

(például a 3. példabeli formula).

- **Def.: Kontradikció (ellentmondás, azonosan hamis, kielégíthetetlen):**

Az a formula, amely minden interpretációban hamis

(például a 4. példabeli formula).

- **Def.: Modell: modellnek nevezzük azt az interpretációt, amelyben a formula igaz.**

Pl. az első példabeli formula 2.,3., 4. 6., 7. és 8. sorban levő interpretációja modell.

- A kétértékű logikában érvényes az ún. harmadik (érték) kizárásának elve, amelyet például az alábbi formulákkal is megfogalmazhatunk:

- $A \land \neg A = H$ (kontradikció) – ez azt jelenti, hogy az A ítéletváltozó az {igaz, hamis} értékek közül pontosan egyet vehet fel (kétértékű logika).

- $A \lor \neg A = I$ (tautológia) – ez informálisan azt jelenti, hogy az A ítéletváltozó az {igaz, hamis} értékek közül legalább az egyiket felveszi.

- **<u>Kérdések:</u>**
- Mi a tautológia tagadása?
- Mi a kontradikció tagadása?

- kielégíthető formulák
  - van modellje vagy
  - tautológia
- Kielégíthetetlen formula
  - nincs modellje
  - kontradikció, ellentmondás

Adjuk meg az (A →B) és a (¬AÚB) formulák kiértékelését minden interpretációban!

A	B	(A→B)	¬A	¬AÚB	(A →B) « (¬AÚB)
I	I	I	H	I	I
I	H	H	H	H	I
H	I	I	I	I	I
H	H	I	I	I	I

Adjuk meg az (A →B) és a (AÙ¬B) formulák kiértékelését minden interpretációban!

A	B	(A→B)	¬B	**(AÙ¬B)**	(A →B) « **(AÙ¬B)**
I	I	I	H	H	H
I	H	H	I	I	H
H	I	I	H	H	H
H	H	I	I	H	H

Ekvivalens formulák

- **Def.: két formula, α és β, ekvivalens ha minden interpretációban megegyezik az igazságértékük.**
- (A két formula közös igazságtáblájában a kiértékelésnek megfelelő oszlopok azonosak)
- Jelölés: $\alpha \equiv \beta$

Igazoljuk, hogy ekvivalensek a következő formulák

(A →B) ↔ (¬ AÚB) és

(¬(A →B)) ↔ (AÙ¬B) és

¬ (A Ú B) ↔ (¬ A⋀¬B))

Példák fontos ekvivalens formulákra

- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- De Morgan azonosságok

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

- 1.b. $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- 2.b. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- 3.b. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- 4.b. $H \wedge A \equiv H$
- 5.b. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 6.b.$A \wedge \neg A \equiv H$
- 7.b $A \wedge I \equiv A$

- 1.a. $A \vee B \equiv B \vee A$
- 2.a. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- 3.a. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
- 4.a. $I \vee A \equiv I$
- 5.a. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- 6.a. $A \vee \neg A \equiv I$
- 7.a. $A \vee H \equiv A$

Halmazelméletben is hasonló azonosságok igazak

- 1.a. $A \cup B = B \cup A$ 1.b. $A \cap B = B \cap A$
- 2. a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 2.b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 3. a. $A \cup (A \cap B) = A$ 3.b. $A \cap (A \cup B) = A$
- 4. a. $U \cup A = U$ 4.b. $\varnothing \cap A = \varnothing$
- 5. a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 5.b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 6. a. $A \cup A = U$ 6.b. $A \cap A = \varnothing$

Az olyan struktúrákat, amelyekben két művelet van definiálva, és van két kitüntett elem, amelyekre a fenti azonosságok igazak, **BOOLE ALGEBRÁnak nevezzük.**

További példa: a valószínűségszámításban Boole algebrát alkotnak az események.

- **Kérdés: Ha α és β ekvivalens formulák, mit tudunk mondani az $\alpha \leftrightarrow \beta$ formuláról?**
- **Lemma: Minden (eddig felírt) igazságtábla igaz úgy is, ha az atomok helyett formulákat írunk.**

- **Lemma: α és β akkor és csak akkor ekvivalens, ha $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautológia.**

  Biz.: a. α ekvivalens β $\Rightarrow$ $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautológia.

  Ha α és β igazságértéke megegyezik, akkor az ekvivalencia definíciója miatt csak igaz lehet, azaz tautológia.

  b. ha $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautológia, akkor a formula csak igaz lehet, de ez pontosan akkor van, ha α és β igazságértéke ugyanaz, vagyis α ekvivalens β.

- **Tétel: Ha α tautológia, akkor az ítéletváltozók helyébe formulákat írva tautológiát kapunk.**
- **Tétel: Ha α tautológia, akkor bármely részformula helyett azzal ekvivalens formulát írva tautológiát kapunk.**