Logika 3

A logikai következmény

A logika egyik feladata: helyes következtetési sémák kialakítása.

Példa következtetésekre :

- Minden veréb madár. 1.Feltétel
- Minden madár gerinces. 2.Feltétel
- **Minden veréb gerinces Következmény**

A példát nem tudjuk nulladrendű formulákkal jól modellezni (minden?).

Az alábbi példa nulladrendben is jól modellezhető:

- Ha elfogy a benzin, az autó leáll. Feltétel1
  Elfogyott a benzin. Feltétel2
- **Az autó leáll Következmény**

Formalizálás

A= Elfogy a benzin, B=az autó leáll.

A megfelelő séma:

A

$A \rightarrow B$

B

Korrekt jelöléssel: $\{A, A \rightarrow B\} \models_0 B$

Latin szavakkal:

- 1. feltétel 1. Premissza
- 2. feltétel. 2. Premissza
- **Következmény Konklúzió**

Mikor helyes egy következtetési séma?

Def.: Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom:

Azt mondjuk, hogy az $\{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$ formulahalmaz következménye a β formula, ha minden olyan interpretációban, amelyben az α^1 , $\alpha^{2,}$ …α^n formulák igazak, β is igaz.

Más szavakkal: $\{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$ formulahalmaz **következménye a β formula, ha β legalább akkor igaz, amikor az α^i-k igazak.**

Jelölés: $\{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\} \models_0 \beta$

Megjegyzés: Mivel az elsőrendű logika követketményfogalma nem teljesen azonos a nulladrendűével, ezért az indexben szokás azt is jelölni, hogy melyik nyelvről van szó: $|=_0$

- Az elsőrendű logikában a következményfogalom jele: $|=_1$

- Ha β tautológia, akkor minden interpretációban igaz, tehát abban is, amelyekben az α^i –k hamisak. Ezért a tautológia bármely formulahalmaz következménye. Ez indokolja a tautológia jelölését: $|=_0 \beta$.

A következményfogalom definíciójának egyszerű következményei:

- α^i-k közös modellje β-nak is modellje (fordítva az állítás nem igaz)
- tautológia következménye csak tautológia lehet: tautológia $|=_0$ tautológia
- a tautológia bármely α formula következménye:

  α $|=_0$ tautológia,
- kontradikciónak bármi lehet a következménye (spec. A is és az A tagadása is) :

  Kontradikció $|=_0$ α
- kontradikció csak kontradikciónak lehet következménye (hiszen más formula esetén igaznak kellene lennie ott, ahol a formula igaz):

  kontradikció $|=_0$ kontradikció

Def.: Azokat a következtetési sémákat tekintjük helyesnek, amelyekben a következmény valóban a feltételek (szemantikai) következménye.

Példák helyes következtetési sémákra (szabályokra)

1. Modus ponens (leválasztási szabály): $\{\alpha, \alpha\to\beta\} \models_0 \beta$

Azt kell vizsgálnuk, ahol α és α→β igaz, ott a β igaz-e. Ha igen, akkor helyes, ha nem, akkor helytelen a következtetési séma. Csak az első interpretációban teljesül, hogy α és α→β igaz. Ebben a interpretációban β is igaz, tehát valóban

$\{\alpha, \alpha\to\beta\} \models_0 \beta$.

- **Ítéletváltozók**
- α β α→β
- I I I
- I H H
- H I I
- H H I

- **Tétel: $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$** $|=_0$ **β akkor és csak akkor, $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n$** $|=_0$ **β**
- **Biz.: $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ együttesen akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n$ igaz.**
- E tétel miatt a $|=_0$ jel bal oldalát a továbbiakban egyszerűen α-val jelöljük, ahol α-n mindig $\alpha=\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n$ formulát értjük.
- (Mutassuk meg most a Modus ponens helyességét)

- **<u>Feladat: Bizonyítsa be, hogy az alábbi következtetési sémák helyesek!</u>**
- Modus tollens (elvető mód, kontrapozíció): $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \models_0 \neg\alpha$
- Hipotetikus szillogizmus (feltételes szillogizmus, láncszabály):

$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \models_0 \alpha \rightarrow \gamma$

- Modus tollendo ponens / diszjunktív szillogizmus (elvéve helyező mód):
- $\{\alpha \vee \beta, \neg\beta\} \models_0 \alpha$
- Indirekt: $\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \models_0 \alpha$

- **<u>Tétel:</u> α $|=_0$ β <u>akkor és csak akkor, ha α→β tautológia.</u>**
- **<u>Biz.:</u>**
- **a.) ha α $|=_0$ β akkor α→β tautológia:**
- a jelölt sor ez esetben nem lehet az igazságtáblában, ugyanis akkor α$|=^0$ β nem teljesülne, hiszen ekkor β-nak legalább akkor kell igaznak lennie, amikor α igaz. A maradék sorokra pedig valóban az i az igazságérték.
- **b.) ha α→β tautológia, akkor α $|=_0$ β:**
- Ha α→β tautológia, akkor a fenti igazságtáblában jelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen, I sorok. Ezekben a sorokban viszont valóban a β legalább ott igaz, ahol az α.

α	β	α→β
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

- Példa: Modus ponens: $\{\alpha, \alpha\rightarrow\beta\} \models_0 \beta$ helyes:
- Ítéletváltozók Formulák
- α β $\alpha\rightarrow\beta$ $(\alpha\wedge(\alpha\rightarrow\beta))$ $(\alpha\wedge(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow\beta$

  I I I I I
- I H H H I
- H I I H I
- H H I H I

- **Feladat: A fenti módszerrel bizonyítsa be, hogy az alábbi következtetési szabályok helyesek!**
- Modus tollens: $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \models_0 \neg\alpha$
- Hipotetikus szillogizmus:

  $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \models_0 \alpha \rightarrow \gamma$
- Modus tollendo ponens / diszjunktív szillogizmus (elvéve helyező mód)

  $\{\alpha \vee \beta, \neg\beta\} \models_0 \alpha$
- Indirekt: $\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \models_0 \alpha$

- Tétel: $\alpha \models_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \wedge \neg\beta$ azonosan hamis.

  Biz: $\alpha \models_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \rightarrow \beta$ tautológia, vagyis $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ kontradikció (azonosan hamis): $\neg(\alpha \rightarrow \beta) = \neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta$
- Példa: Modus ponens $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \models_0 \beta$ helyes:

Ítéletváltozók		**Formulák**		
α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\boldsymbol{(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))}$	$\boldsymbol{(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \wedge \neg\beta}$
I	I	I	I	H
I	H	H	H	H
H	I	I	H	H
H	H	I	H	H

- **Feladat: A fenti módszerrel bizonyítsa be, hogy az alábbi következtetési szabályok helyesek!**
- \- Modus tollens: $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \models_0 \neg\alpha$
- \- Hipotetikus szillogizmus:

$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \models_0 \alpha \rightarrow \gamma$

- \- Modus tollendo ponens / diszjunktív szillogizmus (elvéve helyező mód)

$\{\alpha \vee \beta, \neg\beta\} \models_0 \alpha$

- Indirekt: $\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \models_0 \alpha$

A rezolúció alapelvéhez

- **Tétel**: $\{\alpha \vee \beta, \gamma \vee \neg\beta\} \models_0 \alpha \vee \gamma$ (diszjunktív szillogizmus általánosabban).

Megjegyzés: Az $\alpha \vee \beta$ és $\gamma \vee \neg\beta$ formulák ún. klózok. E két klóz rezolvense $\alpha \vee \gamma$.

Biz.: igazságtáblával, a következők alapján többféleképpen lehet:

- a.) def. alapján (házi feladat)
- b.) $\alpha \models_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \rightarrow \beta$ tautológia (házi feladat)
- c.) $\alpha \models_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \wedge \neg\beta$ azonosan hamis (előadáson)

- Alkalmazás: automatikus tételbizonyítás, rezolúció (PROLOG nyelv) alapelve
- A következményfogalom eldöntésére bizonyított tételekben az összes interpretációt meg kell vizsgálni. Ez exponenciális nagyságrendű feladat. Ezért volt forradalmi jelentőségű a rezolúció felfedezése (Robinson, 1965).

KNF

- Def.: Konjunktív NormálForma,

KNF: K^i klózok konjunkciója,

klóz: literálok diszjunkciója,

literál: atom, vagy annak tagadása.

KNF: diszjunkciók konjunkciója

- $K^1 \wedge K^2 \wedge \ldots \wedge K^n$
- $K^i = A^1 \vee A^2 \vee \ldots \vee A^n$
- Literál
  - Pozitív, ha A
  - Negatív, ha ¬A

Tétel: Minden formulához létezik vele ekvivalens konjunktív normálforma.

PÉLDA :

$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

De Morgan $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg \alpha \vee \neg\beta$

$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg\beta$

$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

DNF

- **Def.: DNF (diszjunktív normálforma): konjunkciók diszjunkciója**

Megjegyzés: A KNF és DNF duális: ua. mindkettő, csak $\wedge$ helyett $\vee$, $\vee$ helyett $\wedge$.

(Funkcionálisan) teljes rendszerek

- minden formula kifejezhető a $\vee$, $\neg$ műveletekkel. Ezért azt mondjuk, hogy e három művelet **teljes rendszert alkot.**
- **A De Morgan azonosságokból azonnal adódik, hogy $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg \beta$, így $\wedge$, $\neg$, és hasonlóképpen bizonyíthatóan a $\vee$, $\neg$ is funkcionálisan teljes halmaz. A $\wedge$, $\vee$ műveletekkel viszont nem lehet a $\neg$-t kifejezni, így a konjunkció és diszjunkció együttesen NEM alkot teljes rendszert.**
- **<u>Feladat:</u>**
- Bizonyítsa be, hogy a $\rightarrow$ és $\neg$ teljes rendszert alkot! (Hogyan alakítható az implikáció ekvivalens diszjunktív formulává?)

- Hozza konjunktív normálformára az alábbi formulát!
- $\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))] \equiv$
- $\neg[(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg(C \vee A) \vee (C \vee B))] \equiv$
- $\neg[\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(C \vee A) \vee (C \vee B))] \equiv$
- $\neg[\neg(\neg A \vee B) \vee ((\neg C \wedge \neg A) \vee (C \vee B))] \equiv$
- $\neg[(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg A) \vee (C \vee B)] \equiv$
- $\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg C \wedge \neg A) \wedge \neg(C \vee B)] \equiv$
- $(\neg A \vee B) \wedge (C \vee A) \wedge (\neg C) \wedge \neg B$
- A klózok:
- $K1=(\neg A \vee B)$
- $K2=(C \vee A)$
- $K3=(\neg C)$
- $K4=\neg B$

A rezolúció alapelve

- **Tétel α $|=_0$ W akkor és csak akkor, ha α∧¬W kontradikció,**

vagyis $\alpha=\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge \ldots\wedge\alpha^n$ miatt $\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge \ldots\wedge\alpha^n\wedge\neg W$ kontradikció.

- **Azaz a rezolúció alapelvét így alkalmazzuk:**
- Adott a $\{\alpha^1,\alpha^2, \ldots,\alpha^n\}$ formulahalmaz. E tétel alapján el szeretnénk dönteni, hogy $\{\alpha^1,\alpha^2, \ldots,\alpha^n\} |=_0 W$?
- W-t is, és a feltételhalmaz formuláit is konjunktív normálformára hozzuk.
- **Mikor igaz egy KNF?**
- Ha minden benne szereplő klóz igaz.
- A klózokban viszont lehetnek negált és negálatlan, azonos atomok. Ezek együttesen nem lehetnek igazak az egész formulában, ezért ezeket a klózpárokból, amelyekben szerepelnek, elhagyjuk, és a „maradékból" egy klózt képezünk, ez a *rezolvens.*
- Az így kapott klózzal bővítjük a formulát. Ezen új formula modelljét (amely interpretációban igaz a formula) keressük.

- **<u>A fentiek alkalmazása:</u>**
- Adott az $\{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$formulahalmaz. El szeretnénk dönteni, hogy $\{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\} \models_0 W$?
- W-t is, és a feltételhalmaz formuláit is konjunktív normálformára hozzuk. Ekkor világos, hogy az

$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n \wedge \neg W$

formula is KNF-ben van.

Azt kell tehát megnézni, hogy van-e modellje. A fenti megjegyzés értelmében olyan klózokat keresünk, amelyekben azonos atom pozitív és negatív literálja szerepel. Ezekből a fent leírt módon konstruáljuk az új klózt, a rezolvenst. Az eljárás akkor ér véget, ha egy negált és egy negálatlan literál önmaga alkot egy-egy klózt. Ezek rezolvense az üres klóz, az azonosan hamis klóz (NIL-nek is nevezik). Jele: EGY KIS NÉGYZET

- **Példa:** **Adott $\{P^1, P^1 \rightarrow Q^1, Q^1 \rightarrow Q^2\}$=AB (adatbázis)**
- **Kérdés: Q^2 következmény-e?**
- **Megoldás:** **$\{P^1, P^1 \rightarrow Q^1, Q^1 \rightarrow Q^2\}$ a feltételek halmaza, mindegyiket KNF-re kell hozni:**
- AB=$\{ P^1, \neg P^1 \vee Q^1, \neg Q^1 \vee Q^2\}$
- W= Q^2 , tagadása: $\neg Q^2$ (tagadás $\Rightarrow$ indirekt feltevés)
- Fentiek értelmében azt kell belátni, hogy az AB$\cup\{\neg Q^2\}$ formulahalmaz elemeinek nincsen modellje, nincsen olyan interpretáció, amelyben igaz lehetne.

- **Lássuk:** Ha például P^1 igaz $\Rightarrow$ $\neg P^1$ nem lehet igaz a 2. klózban, ezért mivel minden klóznak igaznak kell lennie, a Q^1 literálnak igaznak kell lennie $\Rightarrow \neg Q^1$ ekkor hamis a 3. klózban, ami szerint tehát Q^2 igaz, de ekkor már ellentmondásra jutottunk, hiszen Q^2 és $\neg$ Q^2 egyszerre nem lehet igaz. (Azért kellene nekik egyszerre igaznak lenni, mert különböző klózokban szerepelnek, és az egész formula igazságát az összes klóz igaz értéke garantálja.
- Igy azonban nagyon nehéz bizonyítani, hiszen minden lehetséges értékadást végig kellene nézni. Ezt oldja meg a rezolúció.

Gondoljuk át:

- Igaz-e, hogy
- $\{\mathbf{P_1}, \mathbf{P_1} \to \mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_1} \to \mathbf{Q_2}\} \models_0 \mathbf{Q_2}$ igaz (minden interpretációjában),

tehát a vele ekvivalens:

- $(\mathbf{P_1} \wedge \mathbf{P_1} \to \mathbf{Q_1} \wedge \mathbf{Q_1} \to \mathbf{Q_2}) \to \mathbf{Q_2}$ is igaz, és

a vele ekvivalens:

- $\neg(\mathbf{P_1} \wedge \mathbf{P_1} \to \mathbf{Q_1} \wedge \mathbf{Q_1} \to \mathbf{Q_2}) \vee \mathbf{Q_2}$ is igaz.
- A formula negáltja:
- $\neg\, (\neg(\mathbf{P_1} \wedge \mathbf{P_1} \to \mathbf{Q_1} \wedge \mathbf{Q_1} \to \mathbf{Q_2})) \wedge \neg \mathbf{Q_2}$
- **azaz a**
- $(\mathbf{P_1} \wedge \mathbf{P_1} \to \mathbf{Q_1} \wedge \mathbf{Q_1} \to \mathbf{Q_2}) \wedge \neg \mathbf{Q_2}$ **formula viszont hamis.**

- Alakítsuk tovább:

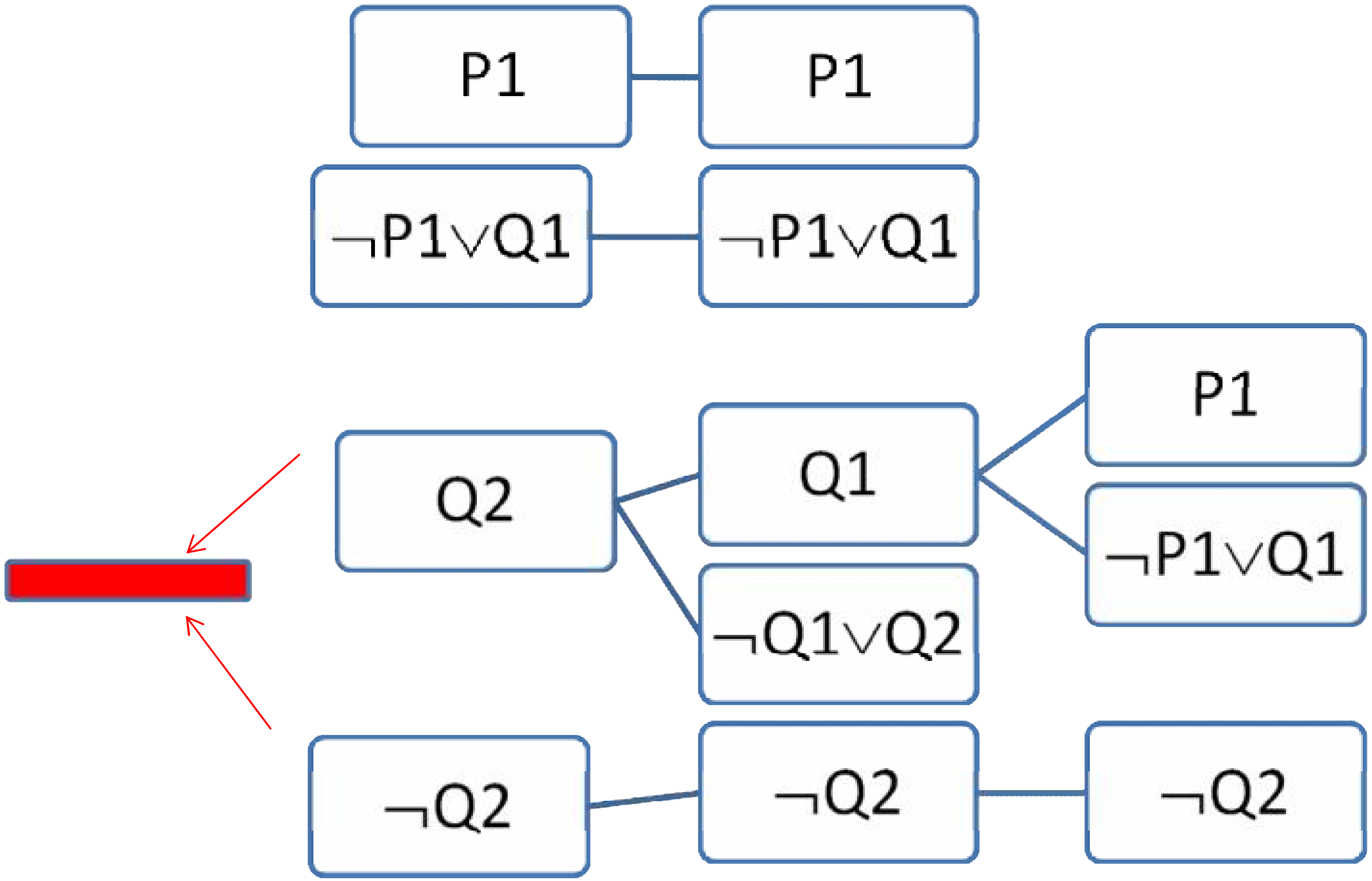
$(P_1 \text{Ù} P_1 \rightarrow Q_1 \text{Ù} Q_1 \rightarrow Q_2) \text{Ù} \text{Ø} Q_2$

$P_1 \text{Ù} (\text{Ø} P_1 \text{Ú} Q_1) \text{Ù} (\text{Ø} Q_1 \text{Ú} Q_2) \text{Ù} \text{Ø} Q_2$

A formula KNF-ben van.

Hamisnak kell lennie, tehát keressünk ellentmondást!

Rezolúciós levezetés:



Fontos szabályok

- Eredeti klózhalmaznak logikai következménye ($|=_0$) a rezolvenssel bővitett klózhalmaz.

Az üres klóz az ellenetett literálpárból jön létre.

Ha a negált eredeti implikáció normálformájából a rezolvensek kielégitetlen klózhalmazt alkotnak, akkor az eredeti igaz.

- **Példa: Igazoljuk, hogy az alábbi ϕ formula tautológia!**
- $\phi=[(A\rightarrow B)\rightarrow[(C\vee A)\rightarrow(C\vee B)]]$
- **Megoldás:**

ϕ akkor és csak akkor tautológia, ha ¬ϕ kielégíthetetlen⇒ ¬ϕ-t KNF-re írjuk át.

- $\neg\phi=\neg[(A\rightarrow B)\rightarrow[(C\vee A)\rightarrow(C\vee B)]]\equiv\ldots\equiv(\neg A\vee B)\wedge(C\vee A)\wedge(\neg C)\wedge(\neg B)$
- **Végezzük el a rezolúciós levezetést!**

Megjegyzés

- Az előadás a www.banki.hu/jegyzetek/mat/szma/szma_1_felev/**bmf-logika**.pdf

anyag alapján készült.