Logika a számítástechnikában 4.előadás, FÁK

Forrás:

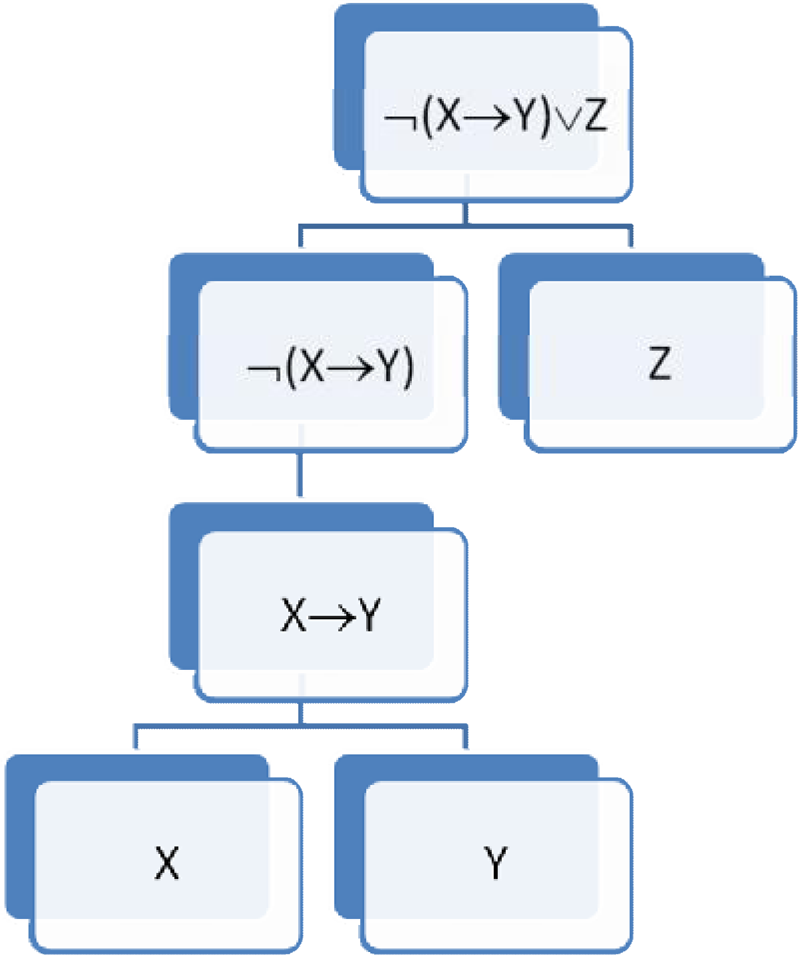
Pásztorné Varga Katalin , Várterész Magda,
A matematikai logika alkalmazáselméletű tárgyalása,
- Panem Kiadó Kft. - 2003 - ISBN: 9789635453641

Fák a logikában
Itéletlogikai formula szerkezeti fája

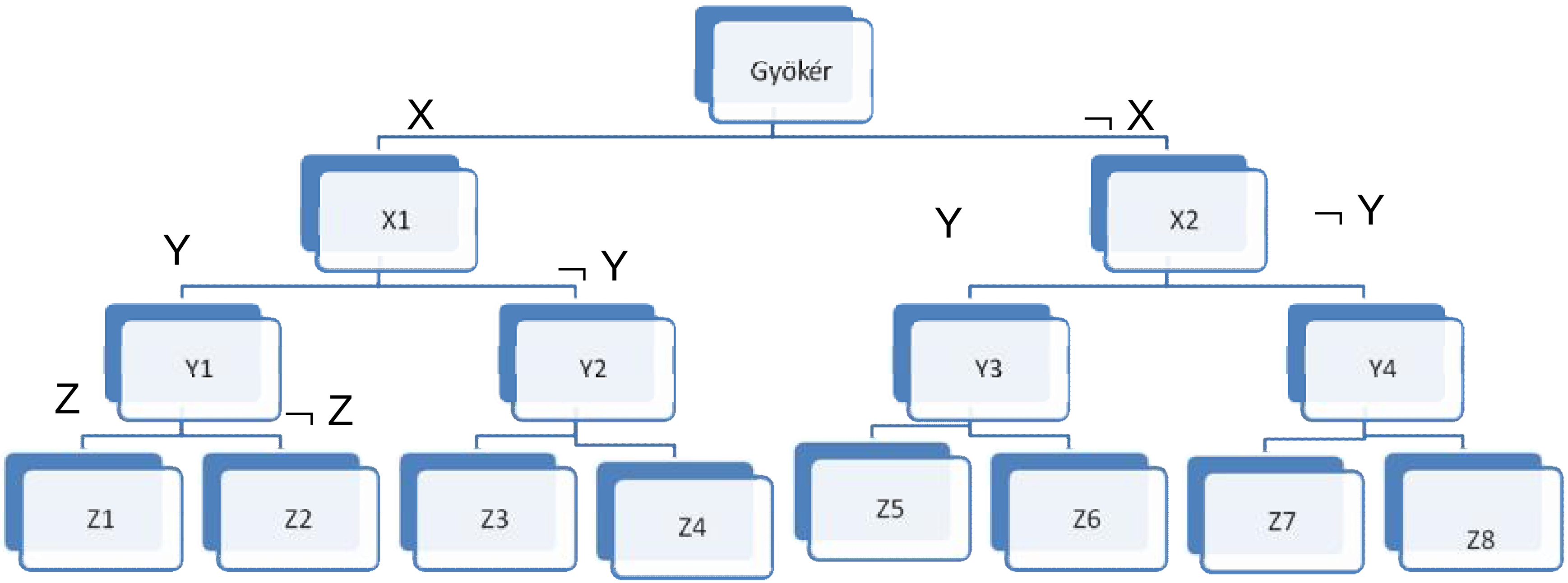
- Egy C formula szerkezeti fája egy olyan véges rendezett fa, melynek csúcsai formulák.

1. A gyökere C.
2. $\neg A$ csúcsának pontosan egy gyermeke van, az A formula
3. Az $A*B$ csúcsának pontosan két gyermeke van, rendre az A és B formulák (* logikai művelet)
4. Levelei elemi (vagy prím) formulák

Példa: rajzoljuk meg a $\neg(X \to Y) \lor Z$ formula ítéletlogikai fáját!



Az X,Y,Z ítéletváltozókat tartalmazó formula szemantikus fája



Igazságértékelési fák

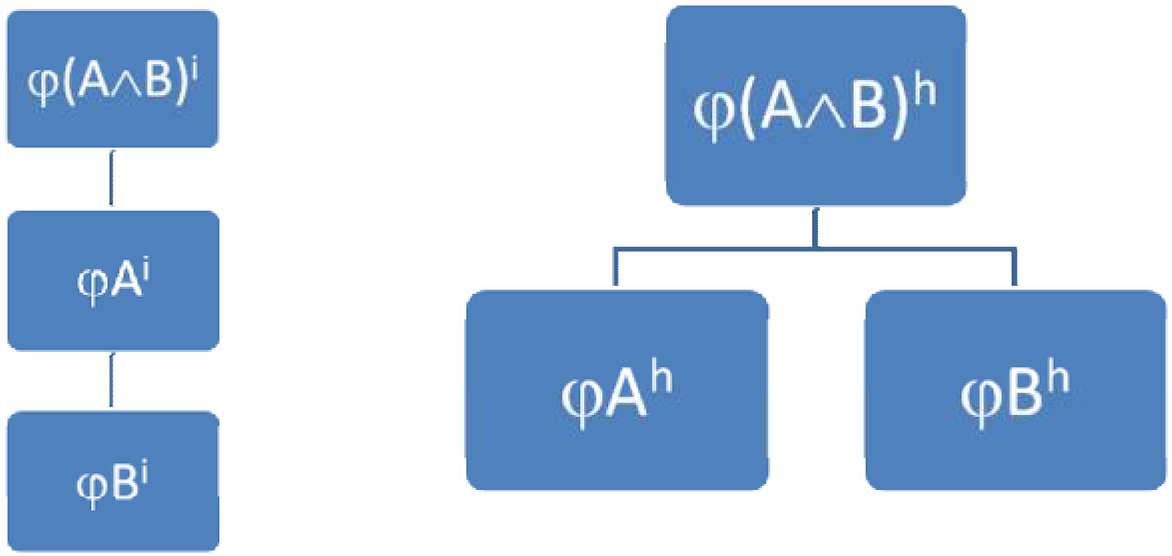
62-63.old

- Legyen *A* tetszőleges formula (ítéletlogikai). Az *A* interpretációira vonatkozó φA^i és φA^h feltételeket a SZERKEZETI REKURZIÓ alapján így határozzuk meg:
- a) ha *A* prímformula, akkor φA^i feltételt azok az $\mathcal{I}$ interpretációk teljesítik, amelyekben $\mathcal{I}(A)=i$, a φA^h feltételt pedig azok, amelyekre $\mathcal{I}(A)=h$.

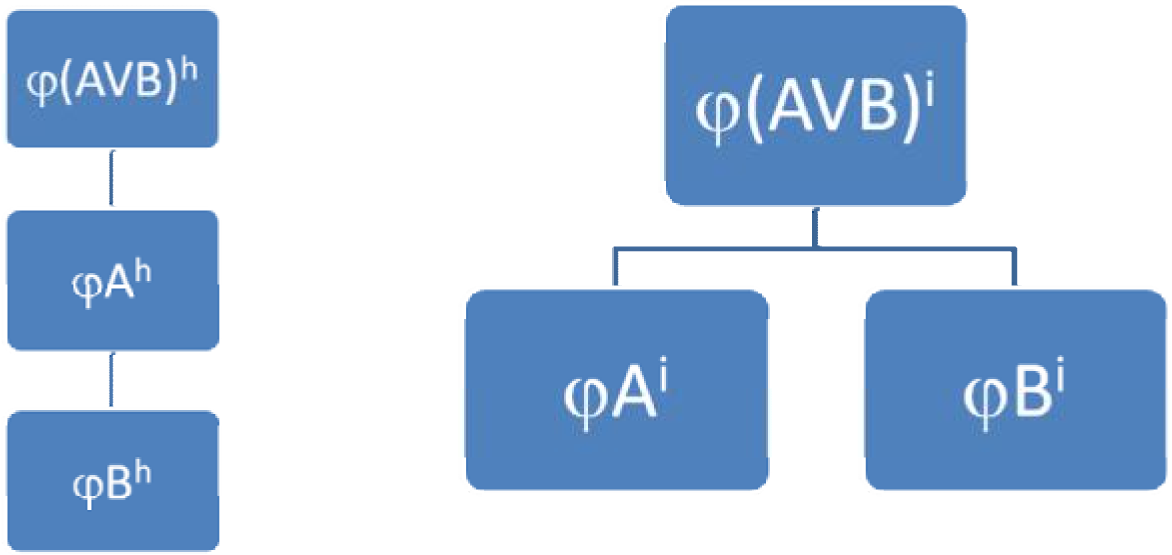
- b) a $\varphi(\neg A)^i$ feltételt azok az $\mathcal{I}$ interpretációk teljesítik, amelyekben a φA^h feltétel teljesül.

$$\begin{array}{c} \boxed{\varphi(\neg A)^i} \\ | \\ \boxed{\varphi A^h} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \boxed{\varphi(\neg A)^h} \\ | \\ \boxed{\varphi A^i} \end{array}$$

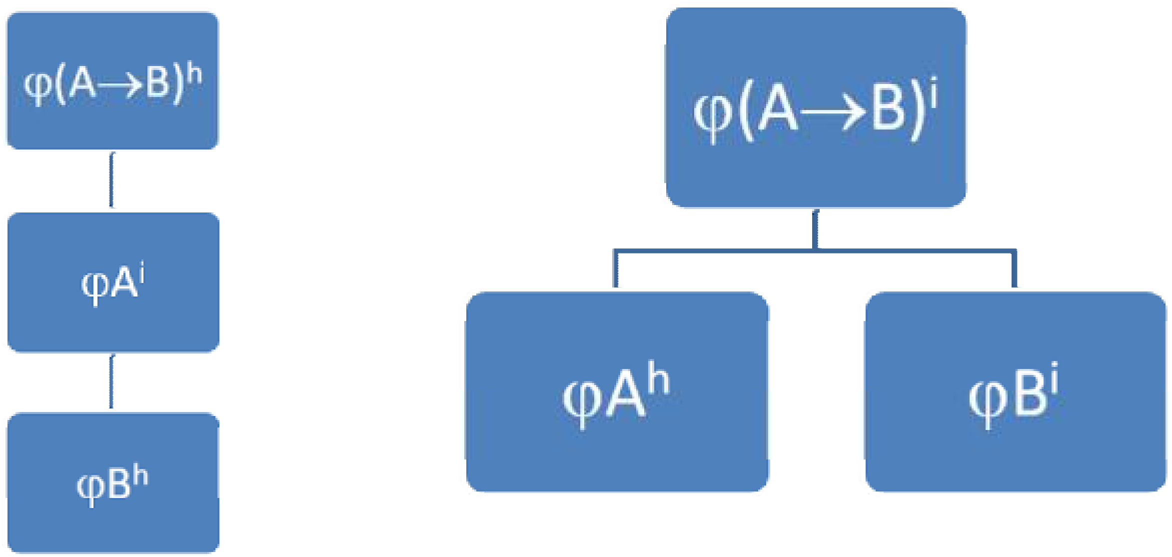
- c) a $\varphi(A \wedge B)^i$ feltételt azok az $\mathcal{I}$ interpretációk teljesítik, amelyekben a φA^i és a φB^i feltételek együttesen teljesülnek.



- c) a $\varphi(A \vee B)^i$ feltételt azok az $\mathcal{I}$ interpretációk teljesítik, amelyekben a φA^i vagy a φB^i feltételek teljesülnek.



- c) a $\varphi(A \rightarrow B)^i$ feltételt azok az I interpretációk teljesítik, amelyekben a φA^h vagy a φB^i feltételek teljesülnek.



- Példa: Adjuk meg az $(Y \vee Z) \wedge (Z \rightarrow \neg X)$ formula igazságtábláját, majd a kiértékelési fáját, és vegyük észre az összefüggéseket!

„lusta tábla”

X	Y	Z	ØX	Z®ØX	(YÚZ)	(YÚZ) Ù(Z®ØX)
I	I	I	H	H	I	H
I	I	H	H	I	I	I
I	H	I	H	H	I	H
I	H	H	H	I	H	H
H	I	I	I	I	I	I
H	I	H	I	I	I	I
H	H	I	I	I	I	I
H	H	H	I	I	H	H

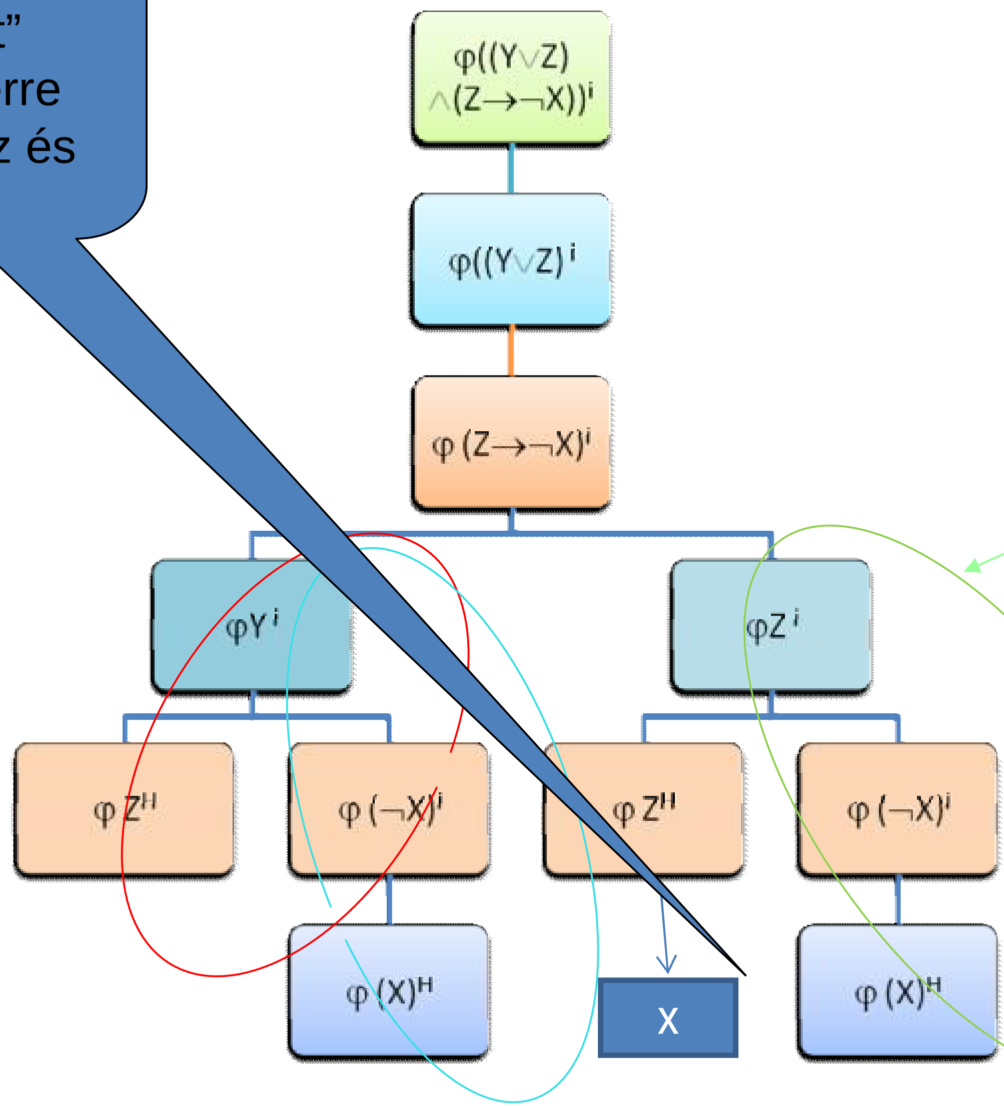
modellek: {(I,I,H),(H,I,I),(H,I,H),(H,H,I)}

X	Y	Z
-	I	H
H	-	I
H	I	-

Az (Y∨Z) ∧(Z→¬X) formula igazságértékelés-fája

64. old

Leolvastunk egy „hamist”
Z egyszerre lenne igaz és hamis



X	Y	Z
-	I	H
H	-	I
H	I	-

Láthatóak a lusta tábla sorai.

Mit láthatunk még a táblából?

- Példa: Az $(Y\vee Z)\wedge(Z\rightarrow\neg X)$ formula igazságtáblája:

X	Y	Z	ØX	Z®ØX	(YÚZ)	(YÚZ) Ù(Z®ØX)
I	I	I	H	H	I	H
I	I	H	H	I	I	I
I	H	I	H	H	I	H
I	H	H	H	I	H	H
H	I	I	I	I	I	I
H	I	H	I	I	I	I
H	H	I	I	I	I	I
H	H	H	I	I	H	H

Modellek: {(I,I,H),(H,I,I),(H,I,H),(H,H,I)}

„lusta tábla”

X	Y	Z
-	I	H
H	-	I
H	I	-

A diszjunktív normálforma (DNF) előállítása az igazságtáblából $(Y\vee Z)\wedge(Z\to\neg X)$

X	Y	Z	ØX	Z®ØX	(YÚZ)	(YÚZ) Ù(Z®ØX)		
I	I	I	H	H	I	H		
I	I	H	H	I	I	I	*	XÙYÙØZ
I	H	I	H	H	I	H		
I	H	H	H	I	H	H		
H	I	I	I	I	I	I	*	ØXÙYÙZ
H	I	H	I	I	I	I	*	ØXÙYÙØZ
H	H	I	I	I	I	I	*	ØXÙØYÙZ
H	H	H	I	I	H	H		

DNF (XÙYÙØZ) Ú(ØXÙYÙZ) Ú(ØXÙYÙØZ) Ú (ØXÙØYÙZ)

A konjunktív normálforma (KNF) előállítása az igazságtáblából $(Y \vee Z) \wedge (Z \rightarrow \neg X)$

X	Y	Z	ØX	Z®ØX	(YÚZ)	(YÚZ) Ù(Z®ØX)		
I	I	I	H	H	I	H	*	ØX Ú ØY Ú ØZ
I	I	H	H	I	I	I		
I	H	I	H	H	I	H	*	ØX Ú Y Ú ØZ
I	H	H	H	I	H	H	*	ØX Ú Y Ú Z
H	I	I	I	I	I	I		
H	I	H	I	I	I	I		
H	H	I	I	I	I	I		
H	H	H	I	I	H	H	*	X Ú Y Ú Z

KNF (ØX Ú Ø Y Ú ØZ) Ù (ØX Ú Y Ú ØZ) Ù (ØX Ú Y Ú Z) Ù (X Ú Y Ú Z)

Rezolúció

A rezolúció alapelvéhez

- Tétel: $\{\alpha \vee \beta, \gamma \vee \neg\beta\} \models_0 \alpha \vee \gamma$

Hol használjuk?
- Szemantikus következményfogalom,
- kielégíthetőség vizsgálata.

Mit jelent? $((\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \neg\beta)) \rightarrow (\alpha \vee \gamma)$ igaz.

a	b	g	$\alpha \vee \beta$	$\gamma \vee \neg\beta$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \neg\beta)$	$\alpha \vee \gamma$	$((\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \neg\beta)) \rightarrow (\alpha \vee \gamma)$
I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	H	H	I	I
I	H	I	I	I	I	I	I
I	H	H	I	I	I	I	I
H	I	I	I	I	I	I	I
H	I	H	I	H	H	H	I
H	H	I	H	I	H	I	I
H	H	H	H	I	H	H	I

A konjunktív normálformát egyszerűsíthetjük a rezolúciós elv alapján

KNF-re hozás miatt:

((YÚZ) Ù(Z ® ØX)) «
((ØX Ú Ø Y Ú ØZ) Ù (ØX Ú Y Ú ØZ) Ù (ØX Ú Y Ú Z) Ù (X Ú Y Ú Z))

a rezolúciós elv alapján
LEVEZETHETŐ:

(ØX Ú Ø Y Ú ØZ) Ù (ØX Ú Y Ú ØZ) Ù (ØX Ú Y Ú Z) Ù (X Ú Y Ú Z) ®

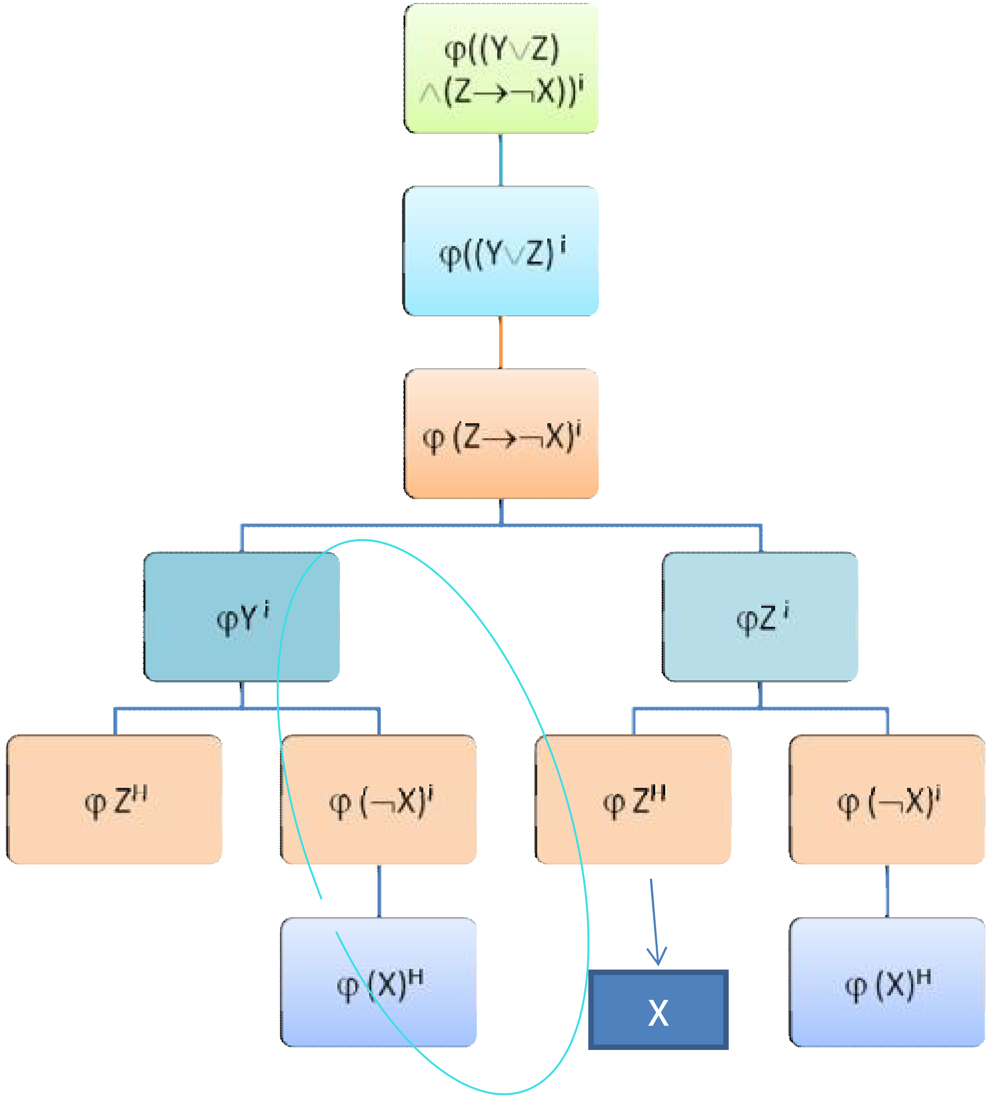
(ØX Ú ØZ) Ù (Y Ú Z) ®

(ØX Ú Y)

Mutassuk meg igazságtáblával!

X	Y	Z	ØX	Z®ØX	(YÚZ)	(YÚZ) Ù(Z®ØX)	ØX Ú Y	(YÚZ) Ù(Z®ØX) ® ØX Ú Y
I	I	I	H	H	I	H	I	I
I	I	H	H	I	I	I	I	I
I	H	I	H	H	I	H	h	I
I	H	H	H	I	H	H	H	I
H	I	I	I	I	I	I	I	I
H	I	H	I	I	I	I	I	I
H	H	I	I	I	I	I	I	I
H	H	H	I	I	H	H	i	I

Hol látszik a $((Y \vee Z) \wedge (Z \to \neg X)) \to (\neg X \vee Y)$ a fában?



X	Y	Z
-	I	H
H	-	I
H	I	-

- Újabb példa $((Y \lor Z) \land (Z \to \neg X)) \to (\neg X \lor Y)$

X	Y	Z	ØX	Z®ØX	(YÚZ)	(YÚZ) Ù(Z®ØX)	ØX Ú Y	(YÚZ) Ù(Z®ØX) ® ØX Ú Y
I	I	I	H	H	I	H	I	I
I	I	H	H	I	I	I	I	I
I	H	I	H	H	I	H	H	I
I	H	H	H	I	H	H	H	I
H	I	I	I	I	I	I	I	I
H	I	H	I	I	I	I	I	I
H	H	I	I	I	I	I	I	I
H	H	H	I	I	H	H	I	I

Bizonyítsuk be, hogy
{(YÚZ), (Z®ØX)} ½= (¬X ∨Y),
használjunk lineáris rezolúciót!

- {(YÚZ), (Z®ØX)} ½= (¬X ∨Y) igaz, akkor
- (YÚZ)Ù(Z®ØX) ® (¬X ∨Y) igaz
- (YÚZ)Ù(ØZÚØX) ® (¬X ∨Y) igaz
- Ø((YÚZ)Ù(ØZÚØX)) Ú (¬X ∨Y) igaz
- Ø (Ø((YÚZ)Ù(ØZÚØX)) Ú (¬X ∨Y)) hamis
- (YÚZ)Ù(ØZÚØX) Ù Ø (¬X ∨Y) hamis
- (YÚZ)Ù(ØZÚØX) Ù X Ù ¬ Y) hamis

- A Klózok:

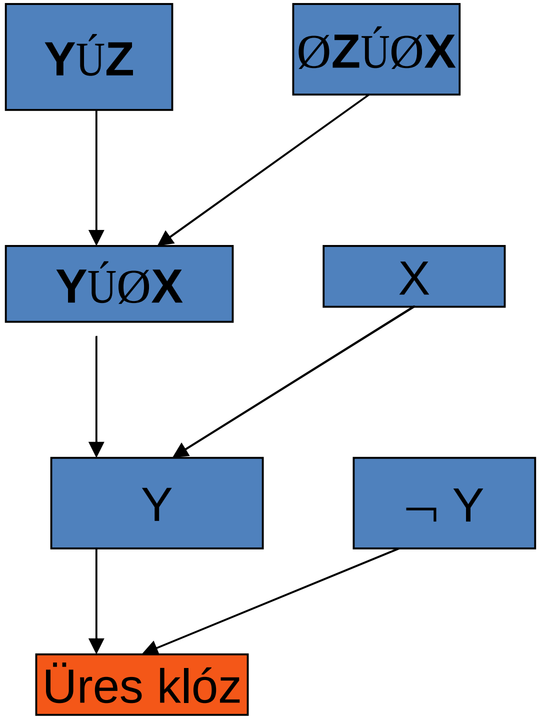
  YÚZ

  ØZÚØX

  X

  ¬ Y

Két párosítható klózzal indítunk, és a kapott rezolvenshez egy újabb, még nem felhasznált klózt párosítunk.



Az $\{(Y \vee Z),(Z \rightarrow \neg X)\}$ formula-halmaznak következménye-e $(Y \vee \neg Z)$?

Nem vezethető le az üres klóz.

$\{(Y \vee Z),(Z \rightarrow \neg X)\} \models_0 (Y \vee \neg Z)$

$$((Y \vee Z) \wedge (Z \rightarrow \neg X)) \rightarrow (Y \vee \neg Z)$$ IGAZ

$$\neg((Y \vee Z) \wedge (Z \rightarrow \neg X)) \vee (Y \vee \neg Z)$$ IGAZ

$$\neg(\neg((Y \vee Z) \wedge (Z \rightarrow \neg X)) \vee (Y \vee \neg Z))$$ HAMIS

$$((Y \vee Z) \wedge (Z \rightarrow \neg X)) \wedge \neg(Y \vee \neg Z)$$ HAMIS

$$\big((Y \vee Z) \wedge (Z \to \neg X)\big) \wedge (\neg Y \wedge Z)$$

hamis

$$\big((Y \vee Z) \wedge (Z \to \neg X)\big) \wedge \neg Y \wedge Z$$

hamis

$$\left(\underbrace{(Y \vee Z) \wedge (\neg Z \vee \neg X)}_{Y \vee \neg X}\right) \wedge \neg Y \wedge Z$$

hamis

$$\underbrace{(Y \vee \neg X) \wedge \neg Y}_{\neg X} \wedge Z$$

hamis

$$Z \wedge \neg X$$

Nem vezethető le az üres klóz

Az $\{(Y \lor Z), (Z \to \neg X)\}$ formula-halmaznak következménye-e $(Y \land \neg X)$

$\{(Y \lor Z), (Z \to \neg X)\} \models_0 (Y \land \neg X)$

$((Y \lor Z) \land (Z \to \neg X)) \to (Y \land \neg X)$ IGAZ

$\neg((Y \lor Z) \land (Z \to \neg X)) \lor (Y \land \neg X)$ IGAZ

$\neg(\neg((Y \lor Z) \land (Z \to \neg X)) \lor (Y \land \neg X))$ HAMIS

$$\neg\left(\neg\left(\left(Y\lor Z\right)\land\left(Z\to\neg X\right)\right)\lor\left(Y\land\neg X\right)\right)$$ hamis

$$\left(Y\lor Z\right)\land\left(Z\to\neg X\right)\land\neg\left(Y\land\neg X\right)$$ hamis

$$\left(Y\lor Z\right)\land\left(\neg Z\lor\neg X\right)\land\left(\neg Y\lor X\right)$$ hamis

$$\left(Y\lor Z\right)\land\underbrace{\left(\neg Z\lor\neg X\right)\land\left(\neg Y\lor X\right)}_{\textit{rezolúciós tétel}}$$

$$\left(Y\lor Z\right)\land\left(\neg Z\lor\neg Y\right)$$ hamis

Nem alkalmazható a rezolúciós elv, mert két pár ellentett literálpár van a formulában, nem vezethető le az üres klóz.

Logikai (szemantikai) következményfogalom, alkalmazás

- Megszerkesztjük a fát
- Leolvashatjuk a normálformát és a szemantikai következményeket
- Vagy bizonyíthatjuk, hogy kielégíthetetlen a kapcsolódó formula (lásd a következő példa). Ennek alapja a következő tétel:
- Legyenek *A*1, *A2, ..., An, B* tetszőleges (ítéletlogikai) formulák. *B* akkor lesz az *{A*1, *A2, ..., An}* formulahalmaz szemantikus következménye, ha az *{A*1, *A2, ..., An, ØB}* formulahalmaz kielégíthetetlen, azaz az *A*1∧*A2* ∧... ∧ *An* ∧ *ØB* formula kielégíthetelen.

Rezolúciós stratégiák összefoglaló

- Klózhalmazt (diszjunkciókat) kell létrehoznunk
  - Pl. mint egy szemantikus következmény levezetésekor:

    $\{formulahalmaz\} \rightarrow F$ (igaz)

    $\leftrightarrow \neg \{formulahalmaz\} \vee F$ (igaz)

    $\leftrightarrow \{formulahalmaz\} \wedge \neg F$ (hamis)
  - Pl. hogy bizonyítsuk, hogy egy formulahalmaz kielégíthetetlen

Fontos megjegyzések:

- Rezolúciós elv,
- Fontos példák:

klózpár	rezolvense
$X\vee Y, \neg Y \vee Z$	$X \vee Z$
$X\vee \neg Y, \neg Y \vee Z$	Nincs, mindkét azonos alapú literál negált
$X\vee \neg Y$, $Z \vee \neg V$	Nincs, nics azonos alapú literál
$\neg X\vee \neg Y$, $X\vee Y\vee Z$	Nincs, két komplemens literálpár van
X, $\neg X$	Üres klóz

Példa: vezessük le különböző rezolúciós stratégiákkal az üres klózt az *{XÚZ,ØXÚZ,XÚ Ø Z, Ø XÚ Ø Z}* formulahalmazból!