Logika, 5.

Az előadásfóliák
Ésik Zoltén (SZTE Informatikai Tanszékcsoport)
Logika a szamtastudomanyban
Logika es informatikai alkalmazasai
Előadásai alapján készültek

Ésik Zoltán (SZTE Informatikai Tanszékcsoport)
Logika a számtastudományban
Logika és informatikai alkalmazásai
Varterész Magdolna, Uni-Deb
http://www.inf.unideb.hu/~varteres/logika/Logikafo.pdf
Pásztorné Varga Katalin
előadásfóliák (ELTE)
Bércesné Novák Ágnes
Elsőrendű logika, doksi.hu

Nulladrendű logika

szintaxisa

- Predikátumok (predikátumváltozók)$\rightarrow$logikai érték
- Konstansok (igaz, hamis)
- $\wedge$,$\neg$, ($\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$), zárójelek, véges sokszor

Szemantika

- Mi az igazságértéke: $p \wedge q$, …
- Levezethetőség, bizonyíthatóság

Nulladrendű logika

- Boole algebra
- Fák
- Helyesség (szemantikai köv. fogalom),
- Teljesség (levezethetőség)
- Normálformák
- Helyes következtetési formák (MP)
- Rezolúció
- ...

Lépjünk tovább a modellezésben…

- Minden veréb madár. Feltétel1
- Minden madár gerinces. Feltétel2
- Minden veréb gerinces. Következmény

$\forall x\,(V(x) \to M(x))$

$\forall x\,(M(x) \to G(x))$

$\forall x\,(V(x) \to G(x))$

- $\forall \exists$

- Más példa:
- $(\exists x)(x<0)$
- $x \in ?$

Példa

$\forall X (\forall Y ((anya(X) \wedge gyermeke(Y,X)) \Rightarrow szereti(X,Y)))$

anya(Júlia)

gyermeke (Máté, Júlia)

((anya(Júlia) $\wedge$ gyermeke (Y,Júlia)) $\Rightarrow$ szereti (Júlia,Y))

(anya(Júlia) $\wedge$ gyermeke (Máté,Júlia)) $\Rightarrow$

szereti (Júlia, Máté)

Példa

„Minden háromszög szögösszege 180 fok”

$\forall x(H(x) \wedge S(x,f(y1,y2,y3))$

alakban írhatjuk fel, ahol

$H(x)=i$, ha x háromszög és

$S(x,f(y1,y2,y3))=i$, ha y1,y2,y3 az x szögei és

$f(y1,y2,y3)=y1+y2+y3=180$ fok.

- Megjegyzés: Itt az univerzum elemei a síkidomok, a szögek, ahol a szögek mérőszáma lehet fok vagy radián. Az S nevű kétváltozós reláció első argumentuma háromszög, a második argumentuma fok lehet és az f nevű háromváltozós matematikai függvény/művelet argumentumai és a függvényérték is fokok.

Az elsőrendű nyelv modellje

Elsőrendű struktúrák komponensei

1. Egy nemüres halmaz, az univerzum.
2. Az univerzumon értelmezett függvények és relációk (vagy predikátumok).

Az elsőorendű nyelv modelljei

Példa: Természetes számok struktúrája

- Természetes számok {0,1,2,...}, jelölése: N
- A rakövetkezés művelete, jelölése: \` : $N \rightarrow N$
- Az összeadás és szorzás műveletei:

  $+, \cdot : \quad N^2 \longrightarrow N$
- A 0 konstans, azaz $0 \in N$
- A rendezési relácio: $< \ \subseteq N^2$

  (vagy $<: N^2 \longrightarrow \{0,1\}$)

Az elsőrendű nyelv szintaxisa 1.

Jelkészlet:

1. Elsőrendű változók, vagy individuum változók:
   $x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots$
2. Függvény jelek, vagy függvény szimbólumok: $f, g, \ldots, f_1, g_1, \ldots$
3. Predikátum jelek, predikátum szimbólumok, vagy reláció szimbólumok:
   $p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots$
4. Logikai jelek: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\uparrow$ (igaz), $\downarrow$ (hamis), $\exists$, $\forall$
5. Elválasztó jelek:) (és a ,

A változók halmaza megszámlálhatóan végtelen, a függvény és predikátum szimbólumok halmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Minden függvényszimbólumra és predikátumszimbólumra adott a szimbólum rangja, vagy aritása, amely nemnegatív egész szám.

A 0 aritásu függvényjel: konstans, vagy konstans szimbólum.

Term-képzés

Az egyenlőséges elsőrendű logikában egy reláció szimbólum kitüntetett: =

Def A termek halmaza a legszűkebb olyan halmaz, melyre teljesül:

1. Minden változó term.
2. Ha $t_1,\ldots, t_n$ termek, f egy n-ed rangú függvényjel, akkor $f(t_1,\ldots, t_n)$ is term. ($n = 0$ esetén az f konstans jel.)

Példa: $f(g(x, h(y)), c)$, ahol f és g 2-rangú függvényjelek, h 1-rangú függvényjel, c konstans szimbólum, x, y változók.

Egy term alapterm, ha nem fordul elő benne változó.

Állítás: Minden term egyértelműen olvasható, azaz vagy változó, vagy egyértelműen írható le:

$$f(t_{1,} \ldots, t_n)$$

alakban, ahol f függvényjel, $t_{1,} \ldots, t_n$ termek.

Szintaxis 2, Formulaképzés

Def: Atomi formula egy $p(t_1, \ldots, t_n)$ alakú kifejezés, ahol p n-rangú predikátum szimbólum, $t_1, \ldots, t_n$ pedig termek. (ha $n = 0$, akkor ez maga a p jel)

A formulák halmaza a legszűkebb olyan halmaz, amelyre teljesül:

1. Minden atomi formula egyben formula is.
2. $\uparrow$ és $\downarrow$ formulák. Ha F és G formulák, akkor $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ és $(\neg F)$ is formulák.
3. Ha F formula, x változó, akkor $(\exists x F)$ es $(\forall x F)$ formulák.

Megjegyzés:

A szokásos precedencia szabályokkal élve gyakran elhagyjuk a külső, és a feleslegessé váló zárójeleket. (A $F \rightarrow (G \rightarrow H)$ formula ugyanaz mint a $F \rightarrow G \rightarrow H$ formula)

Példa: $p(x, f(y)) \rightarrow (\exists z(\neg\, q(x,z))$, ahol x,y,z változók, f 1-rangú függvény jel, p,q 2-rangú predikátum jelek.

Szintaxis

Minden formula egyértelműen olvasható.

Def: Legyenek F es G formulák.

F a G közvetlen részformulája, ha a G formula $(\neg F)$, $(F*H)$, $(H*F)$ vagy (QxF) alakú, ahol

$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ és $Q \in \{\exists, \forall\}$, H formula, x változó.

F a G részformulája, ha létezik a formulák olyan $H_0, \ldots, H_n$ $(n > 0)$ sorozata, hogy

$H_0 = G$, $H_n = F$, és H_i a H_{i-1} közvetlen részformulája, $i = 1,\ldots,n$ esetén.

Egy F formula pontosan akkor a G formula részformulája, ha G felírható

$$G = uFv$$

alakban alkalmas u és v szavakra, azaz ha F rész-szóként előfordul G-ben.

Szintaxis

Def: Legyen F formula, G az F egy Q*x*H alakú (Q kvantor) részformulája. Ekkor az *x* H-ban való előfordulásai kötöttek. Az *x* egy F-ben való előfordulása szabad, ha nem kötött.

Példa: Az alábbi formulában a piros változó előfordulások kötöttek, a zöldek szabadok.

$\exists x(p(x, y) \wedge \forall z(q(x,y) \vee r(x,z))) \vee q(x,x)$

Def: Zárt formulának vagy mondatnak nevezünk egy olyan formulát, melyben egyetlen változó sem fordul elő szabadon.

Példa: $\exists x \forall y\ p(f(x,y))$ mondat.

Szemantika

Legyen L elsőrendű nyelv (mely a függvény és predikátum szimbólumokkal adott).

Def: L-típusú struktúra egy olyan $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ hármas, ahol

1. A nemüres halmaz (UNIVERZUM),
2. I (interpretáció) minden f n-rangú függvényszimbólumhoz egy

I(f) : $A^n \to A$ függvényt, és minden n-rangú p predikátum szimbólumhoz egy

I(p) : $A^n \to \{0,1\}$ *(gaz vagy hamis igazságértéket)*

predikátumot (vagy relációt) rendel,

3. φ minden változóhoz az A egy $\varphi(x)$ elemét rendeli („helyettesítő érték”).

Szemantika

Megjegyzés: Az n=0 esetben I(f)-et az A, I(p)-t a {0,1} halmaz egy elemével azonosíthatjuk.

Megjegyzés: Néha a struktúra harmadik komponensét elhagyjuk, ekkor struktúra egy (A, I) pár.

Megjegyzés: amennyiben a nyelv egyenlőséges, kikötjük, hogy I(=) az A halmazon értelmezett egyenlőségi predikátum.

Def: Legyen t term, $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ struktúra. Ekkor a t által az $\mathcal{A}$ struktúraban jelölt

$\mathcal{A}(t) \in A$ elemet az alábbi módon definiáljuk:

1. $t = x$. Ekkor $\mathcal{A}(t) = \varphi(x)$.
2. $t = \mathrm{f}(t_1, \ldots, t_n)$. Ekkor $\mathcal{A}(t) = I(\mathrm{f})(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_1))$.

Megjegyzés: $I(f)$ helyett gyakran f-et, $I(p)$ helyett p-t írunk.

Szemantika

Példa: (Egy adott interpretáció) Legyenek + és $\times$ 2-rangú függvényjelek; ´ 1-rangú függvényjel; $\underline{0}$, $\underline{1}$ konstansjelek, < 2-rangú predikátum szimbólum.

$\mathcal{N} = (\mathrm{N}, I, \varphi)$ ahol

1. $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
2. $I(\acute{})$ a rákövetkezési függvény, $I(+)$ es $I(\times)$ az összeadás és szorzás függvények, $I(\underline{0}) = 0$, $I(\underline{1}) = 1$, I(<) a szokásos rendezés.
3. $\varphi(x) = 2$, $\varphi(y) = 3$, ... (mintha helyettesítési érték lenne)

Ekkor:

1. $t = (x + \underline{1}) \times y$, $\mathcal{N}(t) = 9$,
2. $t = (x \times y) + \underline{0}$, $\mathcal{N}(t) = 6$,
3. $t = (\underline{0} + \underline{1}) \times \underline{1}$, $\mathcal{N}(t) = 1$.

Szemantika

Def: Legyen A = (A, I, φ) struktúra, x változó, $a \in$ A. Ekkor az $A_{[x \; \mathbf{a} \; a]}$ az az (A, I, φ´) struktúra, ahol

$$j\,'(y) = \begin{cases} j\,'(y) & x \neq y \\ a & x = y \end{cases}$$

Szemantika

Def: Legyen F formula, $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ struktúra. Az F értéke az $\mathcal{A}$ struktúrában az alábbi $\mathcal{A}(F) \in \{0,1\}$ érték:

Ha F a $p(t_1, \ldots, t_n)$ atomi formula, akkor

$\mathcal{A}(F) = I(p(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)))$.

Ha $F = \uparrow$ vagy $F = \downarrow$, akkor sorrendben $\mathcal{A}(F) = 0$ ill. $\mathcal{A}(F) = 1$.

Ha F = G*H, ahol $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, akkor $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F) * \mathcal{A}(F)$.

Ha F = $\neg$G, akkor $\mathcal{A}(F) = \neg\, \mathcal{A}(F)$.

(vagyis a helyettesítések alapján számítjuk a logikai értéket)

Szemantika

Ha *F* = ∃*xG*, akkor

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1 & \textbf{\textit{ha van olyan}}\ a \in A, hogy\ \mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(G) = 1 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$$

Azaz ha van olyan x |→a helyettesítés, amelyre igaz az állítás. *(a Î A)*

Ha *F* = ∀*xG*, akkor

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1 & ha\ \textbf{\textit{bármely}}\ \ a \in A\text{-}ra\ \ \mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(G) = 1 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$$

Azaz ha bármely x |→a helyettesítésre igaz az állítás. *(a Î A)*

Szemantika

Megjegyzés: Amennyiben $\mathcal{A}$ (F) = 1, akkor az

$\mathcal{A} \models F$ vagy

$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$

jelölést is használjuk, és azt mondjuk, $\mathcal{A}$ kielégíti az F formulát, vagy modellje az F formulának ($\mathcal{A}$ a formulában szereplő függvények és predikátumok A halmazbeli interpretációjára, illetve a halmaz elemeivel történő „számolásra” vonatkozó struktúra!).

Ellenkező esetben az $\mathcal{A} \not\models F$ jelölést használjuk.

Példa: Legyen $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I, \varphi)$ a korábban megadott példából.

- Ha $\varphi(x) = 0$, akkor $\mathcal{N} \not\models \exists y(y < x)$.
- Ha $\varphi(x) = 3$, akkor $\mathcal{N} \models \exists y(y < x)$.

Tetszőleges φ esetén $\mathcal{N}$ modellje az alábbi formulák mindegyikének:

1. $x < x + 1$, $\forall x(x < x + 1)$.
2. $\forall x(x \times x = x \rightarrow (x = 0 \vee x = 1))$.
3. $\forall x \forall y(x = y \vee x < y \vee y < x)$.

Szemantika

Állítás: Legyen t term, F formula, és legyenek $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ és $\mathcal{A}' = (A, I, \varphi')$ struktúrak.

1. Ha $\varphi(x) = \varphi'(x)$ minden olyan x változóra, amely előfordul t-ben, akkor $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}'(t)$.
2. Ha $\varphi(x) = \varphi'(x)$ minden olyan x változóra, mely szabadon előfordul F-ben, akkor

$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}'(t)$.

Következmény: A fenti jelölésekkel, $\mathcal{A}(t)$ független minden olyan változó értékétől, mely nem fordul elő t-ben. Továbbá $\mathcal{A}(t)$ független minden olyan változó értékétől, mely nem fordul elő szabadon F-ben.

Ezért ha F mondat, akkor értelmes arról beszélni, hogy $\mathcal{A} \models F$ teljesül-e egy $\mathcal{A}(A, I)$ változó hozzárendelés nélküli struktúrára.

Szemantika

Def:

1. Egy *F* formulát kielégíthetőnek nevezünk, ha létezik modellje. Ellenkező esetben *F* kielégíthetetlen, vagy azonosan hamis.
2. Egy *F* formulát tautológiának (vagy érvényesnek ,vagy azonosan igaznak) nevezünk, ha minden struktúra kielégíti. Jelölése: $\models$ F.

Példa

- Tautologiák: $\uparrow$, F$\vee$ $\neg$F, F $\rightarrow$ F, F $\rightarrow$G $\rightarrow$ F, ahol F,G tetszőlegesek.
- Kielégíthető formulák, melyek nem tautológiak: (p $\wedge$q) $\rightarrow$ $\neg$p, $\exists xp(x)$.
- Azonosan hamis: $\downarrow$, F$\wedge$ $\neg$F, ahol F tetszőleges.

Szemantika

Állítás: F akkor és csak akkor kielégíthető, ha $\neg F$ nem tautológia. F akkor es csak akkor tautológia, ha $\neg F$ azonosan hamis.

Állítás: Tetszőleges F formulára és x változóra:

1. $\models$ F akkor és csak akkor, ha $\models \forall x F$.

(jelentése: egy formula akkor és csakis akkor azonosan igaz, ha univerzális lezártja az)

2. F akkor és csak akkor kielégíthető, ha $\exists x F$ az.

(jelentése: egy formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha egzisztenciális lezártja az.)

Szemantika

Def: Azt mondjuk, hogy az *F* és *G* formulák ekvivalensek, ha Mod(*F*) = Mod(*G*). Jelölése: $F \equiv G$.

(azaz ha megfeleltető modelljeik ekvivalensek. Mi is a modell? Tekinthető egyfajta interpretációnak is.)

Állítás: $F \equiv G$ akkor és csakis akkor, ha $\models (F \leftrightarrow G)$.

Modell, igazságérték, interpretáció az elsőrendű logikában

Igaz-e, hogy $\forall x \; \exists y \; P(x,y)$

Fontos, hogy

- milyen értékeket vehet fel az x és y változó?
- mi a jelentése a P prédikátumnak?
- Azaz milyen modellben, struktúrában vizsgálódunk?

I. Interpretáció :

- (vizsgáljuk meg a 23. dián leírt példádát!)

Legyen az univerzum a természetes számok halmaza, és P(x, y) jelentse azt, hogy $x<y$. Ekkor a $\forall x \; \exists y \; P(x,y)$ formula jelentése, interpretációja:

- $\forall x \in N \; \exists y \in N \; x<y$. Vagyis, minden x természetes számhoz létezik egy nálánál nagyobb y természetes szám.
- Ebben az interpretációban tehát a formula igaz.

- II. interpretáció: univerzum:= természetes számok halmaza

P(x,y):= y<x, vagyis, igaz-e, hogy $\forall x \in N$ $\exists y \in N$, hogy y<x?

Ez nem igaz, mert az x=1-hez nincs ilyen y. Hamis.

- III. interpretáció: univerzum:= Racionális számok $x,y \in Q$

P(x,y) prédikátum jelentése: $x \cdot y=1$ (azaz P(x,y) igaz, ha $x \cdot y=1$)

Ez hamis, mert $0 \in Q$-ra nincs ilyen y.

- IV. interpretáció: univerzum:= Emberek halmaza

P(x,y) predikátum jelentése: x-nek y az édesanyja.

Igaz-e, hogy ($\forall x$ $\exists y$ P(x,y)), vagyis, hogy $\forall$ (minden) embernek $\exists$ (létezik) édesanyja?

Ez igaz.

Vajon vannak-e az elsőrendű logikában:

- Azonosan igaz formulák? (amelyek univerzum-függetlenek)
- Vannak-e helyes következtetések?
- Vannak-e normálformák?

- Mi történik a helyességgel és teljességgel?
- Hogyan képzelhető el a rezolúció?