

Matematikai logika és
alkalmazásai
NIMML1MAEM

<http://nik.bmf.hu/takacsm/>

A logika rövid története

Esik Zoltán, 2007 Logika a
számítástudományban előadása
alapján

Ókor

- Triviális: A trivium szóból származik
trivium (tri + via = három út): nyelvtan, retorika, logika
- a trivium az alapja a quadrivium (aritmetika, geometria, zene, asztronómia) megismerésének.
- Szofisták: formális érvelés, paradoxonok
- Hazug paradoxon: Én most hazudok.
- Dolgozatírás paradoxona: A jövő hét valamelyik napján dolgozatot írtok. Nem mondom meg melyik napon, csak azt, hogy meg fogtok lepődni.

Ókor

- Axiomatikus módszer: Euklidész
 - A geometriai tételeket tisztán logikai úton axiómákból bizonyított, a geometria axiomatikus felépítése.
- Néhány euklidészi axióma:
 - Bármely két ponton át húzható egyenes.
 - Minden középpontból minden sugárral lehet kört rajzolni.
 - (Párhuzamossági axióma)
 - Ha két egyenest úgy metsz egy harmadik egyenes, hogy a metsző egyenes egyik oldalán keletkező szögek összege kisebb 180 foknál, akkor az első két egyenes is metszi egymást.
 - Ekvivalens alak: Bármely egyeneshez, bármely rajta kívül fekvő ponton át legfeljebb egy párhuzamos egyenes húzható.
- Mit jelent a nem-euklidészi geometria (Bolyai)?

- 17-18. sz.
 - Leibniz
 - Logika tanulmányozására matematikai módszereket javasolt.
 - Univerzális problémamegoldó gépies eljárás gondolata.
- 19. sz. közepe -19. sz. vége
 - A logika algebraizálása: Boole, Schröder, De Morgan, Peirce
 - Logikai fogalmakat algebrai fogalmakkal modelleztek
 - Boole algebra, relációalgebra

19. sz. vége - 20. sz. első fele

- Ellentmondások az analízisben, naív halmazelméletben
- Cauchy „tétele” a folytonos függvény sor összegéről
- Russel paradoxona: Az összes halmazok H halmazának számossága megegyezik hatványhalmazának számosságával, hiszen H tartalmazza minden részhalmazát.
- Az összes önmagukat nem tartalmazó halmazok halmaza.
- A logika mint a matematika formális nyelve (bizonyítások pontossága).
- Frege formális rendszere (formális nyelv, levezetési szabályok) és alkalmazása az aritmetikára.
- Russell (Whitehead: Principia Mathematica (1910-13)).
- A matematika addigi ismeretei nagy részének **axiomatikus tárgyalása a formális logika nyelvén.**
- A halmazelméleti ellentmondások feloldása az osztályfogalmat bevezető formális rendszerben.

- Hilbert programja:
 - az egész matematika axiomatikus megalapozása és konzisztenciájának bizonyítása véges eszközökkel. Hilbert kalkulus: 1920.
- Gödel teljességi tétele.
- Gödel nem-teljességi tételei.
 - 1. tétel: Ha egy axióma-rendszer elegendően erős (kifejező), akkor mindig lesz olyan állítás, hogy sem ő, sem tagadása nem igazolható az axiómákból.
 - 2. tétel: Egy axiómarendszer ellentmondástalansága általában nem bizonyítható az axiómarendszeren belül.
- Hilbert programja megvalósíthatatlan.
- Church - Turing kiszámíthatóság (1930-as évek).
- Church tétele: Az elsőrendű logika eldönthetetlen.
- Az aritmetika (a természetes számok elsőrendű elmélete) eldönthetetlen.

20. sz. közepétől

Logika a számítástudomány jegyében

- Kombinatorikus és szekvenciális áramkörök tervezése.
- Automaták és formális nyelvek elmélete.
- Adatbázisok és lekérdező nyelvek.
- Logikai programozás.
- Programtervezés.
- Rendszerek verifikációja.
- Mesterséges intelligencia (szakértői rendszerek, gépi tanulás).
- Bonyolultságelmélet.
- Programozási nyelvek szemantikájának elmélete.

Predikátumkalkulus és ítéletkalkulus.

- A logikai programozás alapjai.
- Heterogén és másodrendű logikák.
- Modális logikák. Fuzzy és más többértékű logikák.
- Rendszerek specifikációja és verifikációja:
 - Temporális logikák.
 - Hoare kalkulus.

Alapfogalmak

Logikai rendszerek

Főbb komponensek és kérdések

- Modellek.
- Szintaxis: formulák.
- Szemantikus fogalmak: mikor elégül ki (érvényes) egy formula egy modellben,
- ...
- Bizonyításelmélet (formális rendszerek).
- Helyesség és teljesség.
- Algoritmikus kérdések.