1. hét A Boole – algebra alapjai

1.1. Bevezetés

A mai korban nagyon fontos a digitális technikai eszközök ismeretére. Ez alatt nem csak az eszközök használatának ismeretét, hanem azok működését is célszerű ismernünk. Természetesen az eszközök tervezése még pontosabb ismereteket fog igényelni. Ebben kíván segíteni a digitális technika tárgy is.

A digitális technika módszereivel az információk leképezése, a műveletek elvégzése, vagy a méréstechnikai feladatok elvégzése is megkönnyíthető. A tárgy elsajátításával fontos eszközök használatával tudunk megismerkedni, és segít a mérnöki szemlélet kialakításában is.

1.2. Halmazelmélet

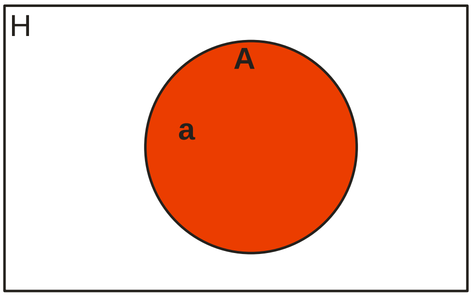
1.2.1. A halmazelmélet alapfogalmai

A halmaz: Halmaznak a közös tulajdonsággal rendelkező dolgok összességét értjük. Jelölése általában nagybetűvel történik, míg halmaz elemét pedig kisbetűvel jelöljük. A halmaz megadható a közös tulajdonság megadásával, ill. elemeinek felsorolásával.

Jelölések:

a $\in A$ A (a eleme az A halmaznak),

$a \in A$ (a nem eleme az A-nak).



1. ábra A halmaz és eleme

A halmaz megadása tehát:

1./ Az őt alkotó elemeket felsoroljuk (ez csak véges sok elem esetén lehetséges).

Pl.: A

A: {1,2,3,4,}

2./Megadjuk azokat a tulajdonságokat, amelyek alapján adott elemről eldönthetjük, hogy az a vizsgált halmazba tartozik-e vagy sem. Ez történhet matematikai formulával (képlet) vagy szöveges megfogalmazással is.

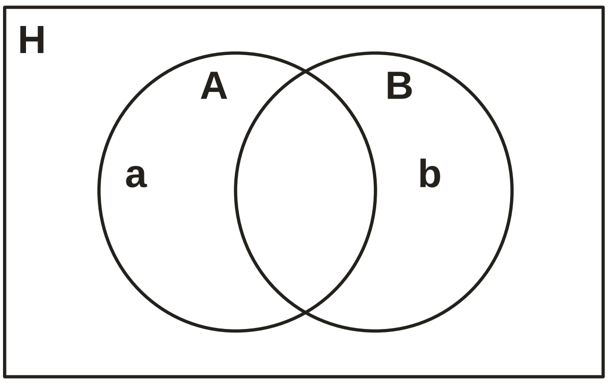
Pl.:

A = $\{x |\ 3x+3=0, X\in R\}$

B: {természetes számok halmaza}

A halmazokat ezen kívül lehet ábrázolni rajz segítségével. Erre több módunk van. Használhatjuk az ún. Venn diagramot vagy a Veitch diagramot.

A **Venn - diagram**[1]**,** vagy más elnevezéssel halmazábra, a halmazokat, azok viszonyait, méretét és műveleteit szemléltető diagram. Többnyire síkidomokat tartalmaz: köröket, téglalapokat, ellipsziseket. A teljes halmazt egy négyzettel, míg a részhalmazokat egy zárt alakzattal célszerűen egy körrel (Venn diagramban) vagy egy téglalappal (Veitch diagramban[2]) jelölik.



[1] John Venn (Kingston upon Hull, 1834. augusztus 4. – Cambridge, 1923. április 4.) brit matematikus. A Boole-logika kifejlesztője. A Venn diagram (egymást átlapoló kördiagramok) létrehozójaként és népszerűsítőjeként ismert, amivel halmazok egymás közötti kapcsolatát lehet szemléltetni, bár ilyen diagramokat évtizedekkel korábban Gottfried Wilhelm Leibniz és Leonhard Euler is használt logikai állítások elemzésére. Azonban ez a szemléltetési módszer csak Venn 1881-ben megjelent Symbolic Logic című műve után vált általánossá.

[2] A Veitch diagram felépítéséről és használatáról a későbbiekben lesz szó.

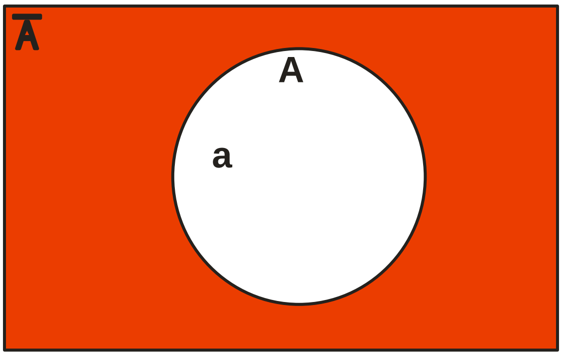
2. ábra A Venn diagram

A komplemens halmaz: Az adott tulajdonsággal nem rendelkező dolgok alkotják az adott halmaz komplemens /kiegészítő halmazát.

Jelölése

$\overline{A}$

(Az ábrán tulajdonképpen $\overline{A} = H$)



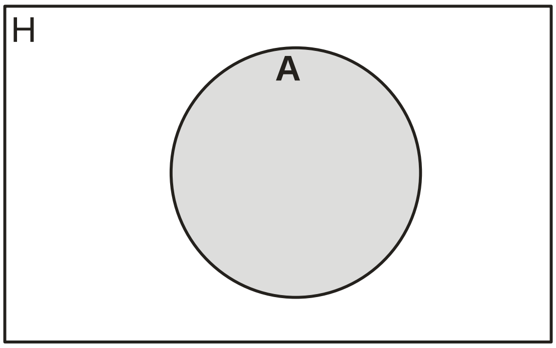
3. ábra A komplemens halmaz fogalma

Üres halmaz: Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, üres halmaznak nevezzük és ∅-val jelöljük.

Jelölése

A=∅

vagy A={}



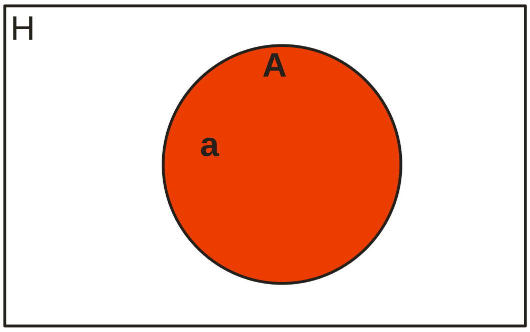
4. ábra Az üres halmaz fogalma

Részhalmaz: Egy halmaz általában további részhalmazokra osztható. A részhalmaz minden eleme eleme az eredeti halmaznak, ugyanakkor van pluszban egy közös tulajdonságuk, mely az eredeti halmaz valamennyi elemére nem jellemző.

Ezért ha egy A halmaz minden eleme H halmaznak is eleme, akkor az A halmazt a H halmaz részhalmazának nevezzük.

Jelölése: $A \subset H$.

Ha $A \subseteq H$ és H-nak van olyan eleme, amely nincs A-ban, akkor valódi részhalmazról beszélünk.

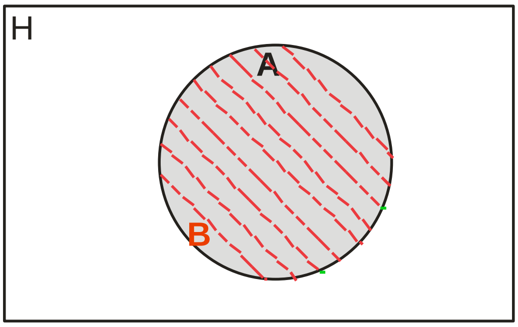


5. ábra A részhalmaz

Egyenlő halmazok: Az A és B halmazokat akkor mondjuk egyenlőnek, ha $A \subset B$ és $B \subset A$ egyidejűleg fennáll.

Jelölése

$A = B$



6. ábra Egyenlő halmazok

1.2.2. A matematika fontos halmazai

N = {Természetes számok halmaza}: Ez a legalapvetőbb számhalmaz, amelybe beletartoznak a 0, 1, 2, 3,….., vagyis ha egy halmaz tartalmazza a 0, 1 számokat és minden k számhoz a rákövetkező számot, akkor tartalmazza az összes természetes számot.

Z = {Egész számok halmaza}: A természetes számok negatív egész számokkal (és valahol nullával) kibővített halmaza.

Q={Racionális számok halmaza}: Azok a számok tartoznak ide, melyeket tört formájában (vagyis $\frac{a}{b}$, ahol $b \neq 0$, hiszen $\frac{0}{0}$ - nak végtelen, és $\frac{x}{0}$ -nak nincs megoldása) is felírhatunk.

Q*= {Irracionális számok halmaza}: Azok a számok tartoznak ide, melyeket tört formájában nem írhatunk fel.

T = {Transzcendens számok halmaza}: nem algebrai számok, amelyek tehát nem gyökei egész (vagy racionális) együtthatós polinomnak, más szóval nem megoldásai

$$\mathrm{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + q_0 = 0}$$

alakú egyenletnek, ahol

n ≥ 1,

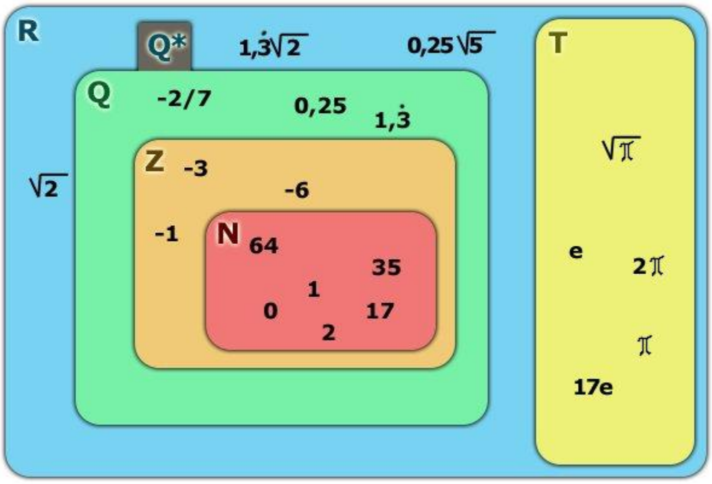
az együtthatók egészek

és nem mind egyenlők nullával.

Ilyen például az *e.*

R={Valós számok halmaza.} A valós számok a racionális és az irracionális számok együttes halmaza (Vannak viszont számok, amelyek se racionális se irracionális számok, mert nem valós számok, a nagyságuk nem meghatározható a valós számegyenesen vett rendezéssel a 0-hoz képest, tehát nem 0, nem is pozitív és nem is negatív számok.) A valós számokat a tizedes törtekkel azonosíthatjuk: a véges valamint a végtelen szakaszosan ismétlődő tizedes törtek a racionális számoknak, míg a végtelen, szakaszosan nem ismétlődő tizedes törtek az irracionális számoknak felelnek meg.

C= {komplex számok}: Beletartoznak a negatív számok gyökei, és alapja az ún. i imaginárius egység, melyre érvényes, hogy $\mathrm{i}^2 = -1$, vagy a négyzetgyökvonás jelének értelmezését kibővítve: $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Így most már megoldható az $\mathrm{x}^2 = -4$ egyenlet, amelynek két gyöke a komplex számok halmazán 2i és -2i.



7. ábra A számhalmazok viszonya

A sorban következő halmazok részhalmazai egymásnak.

$N \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R} \subset \mathrm{C}$

1.3. Halmazműveletek

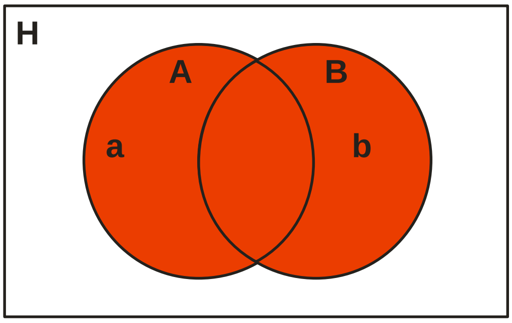
1.3.1. A halmazműveletek definíciója

1.3.1.1. Unió

Az A és B halmazok egyesítésén vagy unióján mindazon elemek halmazát értjük, amelyek vagy A-nak, vagy B-nek (vagy mindkettőnek) elemei.

Jelölése:

A ∪ B = {x | x ⊂ A **vagy** x ⊂ B}.



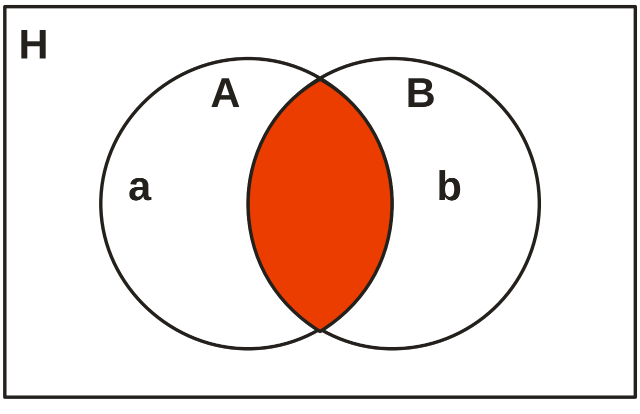
8. ábra Unió müvelete

1.3.1.2. Metszet

Az A és B halmazok közös részén vagy metszetén azon elemek halmazát értjük, amelyek A-nak és B-nek is elemei.

Jelölése:

A ∩ B = { x | x ⊂ A **és** x ⊂ B}



9. ábra Metszet

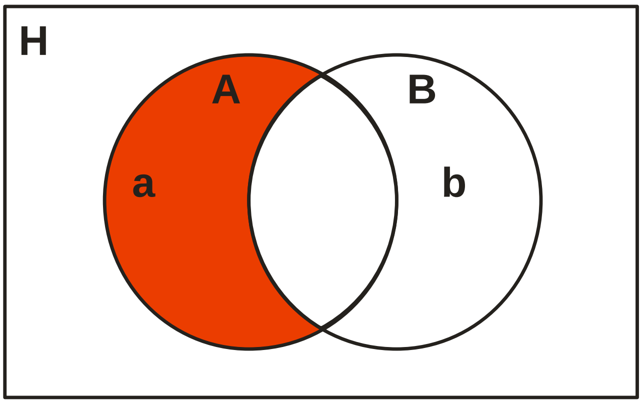
1.3.1.3. Különbség

Az A és B halmazok különbségén azon elemek halmazát értjük, amelyek A-nak elemei, de B-nek nem.

Jelölése:

$A - B = \{x \mid x \subset A \text{ és } x \subseteq B\}$,

vagy $A \setminus B$.



10. ábra Különbség

Descartes - szorzat

Az A és B halmazok szorzatának (Descartes-szorzatának) nevezzük azt a C halmazt, amelynek elemei az A és B halmaz elemeiből az összes lehetséges módon képzett rendezett elempárokból áll. Jelölése: $C = A \times B = \{(a,b) \mid a \subset A \text{ és } b \subset B\}$.

1.3.2. A halmazműveletek fontosabb összefüggései és tulajdonságai:

Legyen A és B ugyanazon H alaphalmaz két tetszőleges részhalmaza. Ebben az esetben érvényesek a következő összefüggések.

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cup H = H$
4. $A \cap H = A$ akkor, ha $A \subset H$
5. $A \cup \overline{A} = H$
6. $A \cap A = \emptyset$ ha $A \subset H$.

Tetszőleges A, B és C halmazokra érvényesek a következő összefüggések:

1. **idempotencia:** Adott halmaz uniója és metszete önmagával visszaadja a halmazt
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
2. **kommutativitás /felcserélhetőség:** Mind az unió , mind a metszet művelet esetén az elemeket szabadon felcserélhetjük.
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$

3. **asszociativitás / átzárójelezhetőség:** Ugyanazokat a műveleteket elvégezve, szabadon képezhetünk műveletcsoportokat.
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. **disztributivitás:** Két művelet között akkor áll fenn ez a tulajdonság, ha több elemen elvégezve az adott műveleteket ugyanarra a végeredményre jutunk, ha előbb az egyik, majd a részeredményeken a másik műveletet végezzük el.
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5. de Morgan-azonosságok:[3] ,

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

A de Morgan-azonosságok fontos alkalmazási területe a diszkrét matematika, az elektronika, a fizika és az informatika. Gyakran használják őket a digitális áramkörök fejlesztésében az alkalmazott logikai kapuk típusának egymással való felcserélésére, illetve a használt kapuk számának a csökkentésére.

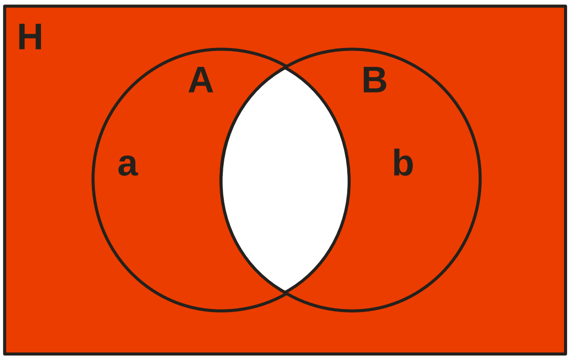
Ezek az azonosságok tetszőleges sok elemre is érvényben maradnak, beleértve a véges, megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálható I indexhalmazok esetét is.

Az azonosság bizonyítását legegyszerűbben a Venn diagramon végezhetjük el.

Az első azonosságot azaz a

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

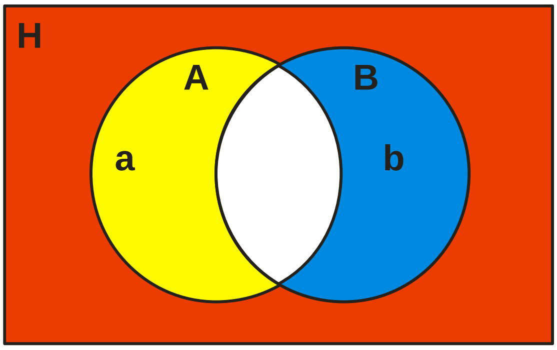
figyelve rajzoljuk fel el az egyenlet **bal** oldalát (piros).



11. ábra $\overline{A \cap B}$

[3] A de Morgan-azonosságok a matematikai logika, illetve a halmazelmélet két alapvető tételét fogalmazzák meg. Az azonosságok Augustus de Morgan ((Madura, 1806. június 27. – London, 1871. március 18.) angol matematikusról kapták a nevüket, jóllehet William Ockham már a középkorban felismerte őket. Ezek az azonosságok minden Boole-algebrában érvényesek.

Ez után ábrázoljuk a **jobb** oldalt.



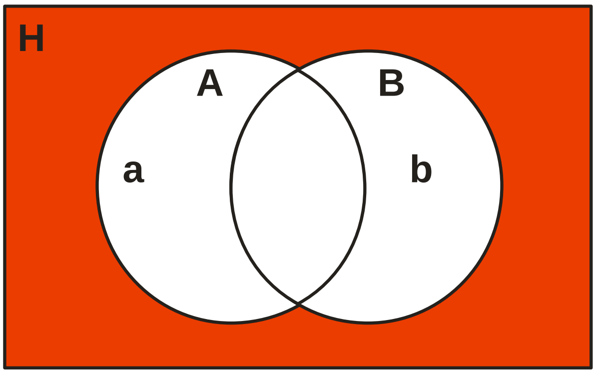
12. ábra $\overline{A} \cup \overline{B}$

Az eredmény az első esetben a piros, H halmaz lesz a másodikban pedig a sárga – kék – piros terület. Könnyen belátható, hogy a két terület egyenlő.

Ugyanezzel az elvvel beláthatjuk a másik azonosság igazságtartalmát is:

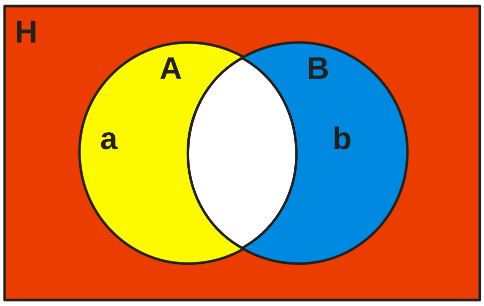
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

A jobb oldal:



13. ábra $\overline{A \cup B}$

és a bal oldal:



14. ábra $\overline{A} \cap \overline{B}$

ahol az eredmény szintén a piros terület. (A kék és a sárga terület NEM). Könnyen belátható, hogy itt szintén ugyanarra a végeredményre jutottunk.

1.4. Számábrázolás

1.4.1. Számrendszerek

Egy számrendszer (vagy számábrázolási rendszer) egységes szabályok alapján meghatározza, hogy számjegyek sorozata milyen számokat jelenít meg.

Elméletileg egy számrendszernek meg kell határoznia:

- A használt számok egy csoportjának (pl. minden egész számok vagy valós számok) ábrázolási szabályait;
- Egy egyedi ábrázolást (vagy ábrázolási szabályt) minden számhoz ;
- Az aritmetikai (esetleg algebrai) szabályokat.

Például, a leggyakrabban használt decimális számábrázolás minden számhoz egy egyedi, a jegyek egy véges sorozatát rendeli, megadja a megfelelő aritmetikai műveletek szabályait (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) illetve meghatároz egy algoritmust a számláláshoz.

Egy helyi értékes számrendszerben, aminek alapszáma b, ennyi szimbólumot vagy számjegyet használnak az első b természetes szám leírására, beleértve a nullát is. A többi szám előállításában a szimbólumok helyének is szerepe van. Az utolsó pozícióban álló számjegy megegyezik a saját értékével, a tőle balra lévő pedig a b alapszámmal meg van szorozva. Ezzel a módszerrel véges számú szimbólummal bármely szám leírható.

1.4.1.1. *Tízes (decimális) számrendszer*

A legelterjedtebb, a mindennapos életben használt számrendszer, melynek alapszáma a 10 A valós számokat a 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 karakterekkel ábrázoljuk.

Pl:

$7890 = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$

$543,21 = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}$

1.4.1.2. *Kettes (bináris) számrendszer*

A kettes számrendszer alapszáma a 2. A legkisebb egész helyi értéke az 1. A valós számokat a 0 és 1 karakterekkel ábrázoljuk.

Pl:

$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 13$

$1101_2 =$ 1101b

1.4.1.3. *Nyolcas (oktális) számrendszer*

A nyolcas számrendszer alapszáma a 8. A kettes számrendszer „rövidített” formájaként használjuk, oly módon, hogy a valós számokat a 0,1,2,3,4,5,6,7 karakterekkel ábrázoljuk.

Pl:

$2416_8 = 010\ 100\ 001\ 1102 = 2 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 1294$

C programozási nyelvben: 02416 → 2416_8

1.4.1.4. *Tizenhatos (hexadecimális) számrendszer*

A tizenhatos számrendszer alapszáma a 16. A kettes számrendszer „rövidített” formájaként használjuk. A valós számokat a 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F karakterekkel ábrázoljuk

Pl:

5E016 = 0011 1110 00002 = 5·162+14·161+0·160 = 24168 = 1294

C programozási nyelvben: 0x5E0

Egyéb jelölés: 5E0h

A különböző számrendszerek természetesen kapcsolatba hozhatók egymással. Ezt szemlélteti a **15. ábra**.

Decimális (10)	Bináris (2)	Oktális (8)	Hexadecimális (16)
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

15. ábra A számrendszerek kapcsolata

1.4.1.5. *Átváltás számrendszerek között*

Legyen az átváltani kívánt szám: 723, 10-es számrendszerben.

Ha 10-esből bármilyen számrendszerbe kívánunk átváltani, az alábbi algoritmust kell követnünk:

- Osszuk az eredeti számot a cél számrendszer alapszámával (2-es számrendszerben ez 2, stb.).
- A maradékot jegyezzük fel jobb oldalra.
- Az osztás eredményét írjuk le a szám alá.
- Ha az nem 0, osszuk újra az alapszámmal.

Folytassuk mindezt addig, míg nem jutunk el 0-ig.

723	:2	1
361	:2	1
180	:2	0
90	:2	0
45	:2	1
22	:2	0
11	:2	1
5	:2	1
2	:2	0
1	:2	1
0	:2	

16. ábra A számrendszerek átváltása

Ezek után a számot „alulról-felfelé” olvassuk. Így az eredmény:

723 = 1011010011

Ez az átváltás mód természetesen más számrendszerek esetén is követhető!

1.4.2. Prefixumok – előtagok

A Mértékegységek Nemzetközi Rendszerében (SI) a prefixumokat, előtétszókat vagy előtagokat a nagyon nagy vagy nagyon kicsi mennyiségek rövid leírására használjuk, a könnyebb áttekinthetőség érdekében.

1.4.2.1. SI – prefixumok

Név	Szimbólum	Érték	16-os alappal	10-es alappal
kilo	k	2^{10} = 1 024	$16^{2,5}$	>= 10^3
mega	M	2^{20} = 1 048 576	16^5	>= 10^6
giga	G	2^{30} = 1 073 741 824	$16^{7,5}$	>= 10^9
tera	T	2^{40} = 1 099 511 627 776	16^{10}	>= 10^{12}
peta	P	2^{50} = 1 125 899 906 842 624	$16^{12,5}$	>= 10^{15}
exa	E	2^{60} = 1 152 921 504 606 846 976	16^{15}	>= 10^{18}
zetta	Z	2^{70} = 1 180 591 620 717 411 303 424	$16^{17,5}$	>= 10^{21}
yotta	Y	2^{80} = 1 208 925 819 614 629 174 706 176	16^{20}	>= 10^{24}

17. ábra SI – prefixumok

Pl:

25 KW = $25 \cdot 10^3$ = 25 000 W (Watt)

1.4.2.2. IEC szabvány

Néhány kettő hatvány értéket a gyakorlatban rövidítve is használunk, mert segít az egyszerűsítésben.

Név	Szimbólum		Érték
kibi-	Ki	binary kilo	2^{10} = 1 024
mebi-	Mi	binary mega	2^{20} = 1 048 576
gibi-	Gi	binary giga	2^{30} = 1 073 741 824
tebi-	Ti	binary tera	2^{40} = 1 099 511 627 776
pebi-	Pi	binary peta	2^{50} = 1 125 899 906 842 624
exbi-	Ei	binary exa	2^{60} = 1 152 921 504 606 846 976

18. ábra IEC szabvány

Pl.:

4 Gbyte = $4 \cdot 2^{30} = 2^2 \cdot 2^{30} = 2^{32}$ = 4 294 967 296 Byte

1.4.3. Számok kódolása

A számok kódolása a számítástechnikában és a rendszertechnikában mindenképpen fontos, mert így a számok megjelenítése, kezelése, a műveletek elvégzése lényegesen egyszerűbbé válik.

A kódolás többféleképpen végrehajtható.

1.4.3.1. Bináris kód

A kétállapotú elemeket felhasználó berendezéseket olyan digitális jellel kell működtetnünk, amely szintén kétféle értékű lehet, vagyis szokásos szóhasználattal bináris. Egy-egy kétállapotú elem egy adott időpillanatban egy elemi bináris egység, 1 bit feldolgozására, tárolására alkalmas, amely tehát 0 vagy 1 értékű lehet. Egy számítástechnikai adat megadásához általában több bitre van szükség. Ezt a bit-sorozatot adat szónak nevezzük. A szó összetartozó 8-bites részének szokásos neve: Byte (bájt).

Bármely bináris szám "szokásos" 10-es számrendszerbeli értékét meg tudjuk határozni, vagy pedig bármely decimális számot felírhatunk binárisban. A következő táblázatban a bináris számrendszer táblázatát láthatjuk:

Decimális	D	C	B	A
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1

19. ábra Az egyszerű binaris kód

1.4.3.2. Binárisan kódolt decimális számok (BCD)

A BCD kódolás esetében minden számjegyet egy-egy bitsorozat ábrázol. Ezzel a módszerrel a számok konverziója és megjelenítése lényegesen egyszerűbbé válik. Ugyanakkor valamivel több elektronikus áramkörre van szükség a aritmetikai számításokhoz, és tárolóterületet veszítünk a bináris ábrázoláshoz képest. Ennek ellenére ez a kódolási eljárás fontos és használatos még ma is. A BCD - nél egy számjegynek általában 4 bit felel meg, amelyek általában a 0–9 karaktereket is jelentik. Más kombinációkat is használnak az előjelek és egyebek jelzésére. Ekkor tehát a decimális szám minden helyiérték együtthatóját kettes számrendszerben fejezzük ki négy helyi értéken

Pl.:

$7890 = (0111\ 1000\ 1001\ 0000)_{BCD}$

7 8 9 0

Decimális	D	C	B	A
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

20. ábra A BCD kódolás

21. ábra BCD elven működő digitális kijelző

1.4.3.3. *Egylépéses kódok*

Az egylépéses kódokról akkor beszélünk, ha a szomszédos kódszavak a lehető legkevésbé, vagyis 1 helyi értéken térnek csak el egymástól. Ebben az esetben a hiba sem lehet ennél nagyobb. A mûszeriparban és az automatizálásban a legelterjedtebb egylépéses kód a GRAY kód ("reflected binary": tükrözött bináris) kód. A felírás szabálya a következő:

Az első oszlopban: 1 db "0", majd 2 db "1", majd ismét 2 db "0", 2 db "1" és így tovább, a második oszlopban: 2 db "0", majd 4 db "1" és 4 db "0" felváltva, a harmadik oszlopban 4 db "0" majd 8 db "1" és 8 db "0" felváltva és így tovább. A táblázat a megfelelő bit-szám bővítéssel tetszés szerinti számig folytatható. Látszik a kódtáblázatból az is, hogy a szomszédos kódszavak valóban csak egy 1 bitben térnek el egymástól.

A másik leggyakoribb egylépéses kód a JOHNSON - kód, amely pazarló (több bitet igényel, n bit esetén a felírható Johnson kombinációk száma: 2*n). Jellegzetességét az 5 bitre felírt táblázat alapján könnyű felismerni: 00000-tól haladva először mindig eggyel több 1-es lép be, majd amikor elértük a csupa 1-esbõl álló kombinációt, a 0-ák belépése következik. A Gray és a Johnson kódon kívül természetesen még sokféle változat létezik (GLIXON, O'BRIEN, TOMPKINS…).

Decimális	D	C	B	A
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1

22. ábra A Gray – kódolás

Decimális	E	D	C	B	A
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	0
7	1	1	1	0	0
8	1	1	0	0	0
9	1	0	0	0	0

23. ábra A Johnson - kódolás

1.4.3.4. *Alfanumerikus kódok*

Az ASCII kód (American Standard Code for Information Interchange = amerikai szabvány kód információcseréhez) a legelterjedtebb alfanumerikus kód. A kódszavak 8 bitesek, ebbõl 7 bitet használnak a következő karakter-fajták kódolására:

- 26 db latin nagybetű (41H…5AH)
- 26 db latin kisbetű (61H…7AH)
- 33 db írásjel, matematikai jel, speciális karakter (20H…2FH, 3AH…40H, 58H…60H, 78H…7EH)
- 33 db vezérlő karakter (00H…1FH és 7FH.) Ezek nem nyomtatásra valók, hanem az adatforgalom szervezésére, az írógép-nyomtató vezérlésére (pl.: CR=kocsi vissza, LF=soremelés,…), ill. a megelőző karakter törlésére (DEL) szolgálnak.

A nyolcadik (MSB) bit a paritásjelzés számára fenntartott hely, ha kihasználják ezt a hibavédelmi lehetőséget, akkor ezzel a bittel általában páros paritást állítanak be. Ekkor a 8. bitnek olyan értéket adnak, amellyel minden kódszó páros számú 1-est tartalmaz. Adattovábbítás után, "vételkor" ellenőrizhető, hogy valóban páros paritású-e minden szó, ha nem, a hibát jelezni lehet.

Egyéb, gyakran használatos alfanumerikus kódok (amelyek táblázatának szükség esetén utánanézhetünk), pl. az EBCDIC (Extend BCD Interchange Code, amely 8 "hasznos" bittel kódolja a karaktereket, BCD sorrendben), a SELECTRIC (8 bites, 1 bit paritás) valamint az ISO kód (8 bites). Léteznek még számunkra "különleges", a fentiektől lényegesen eltérő karakterkészletű (cirill betűs, görög betűs, arab írásjeles, japán karakteres ill. grafikus ábra-elemeket tartalmazó) kódrendszerek is.

Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char
0	00	Null	32	20	Space	64	40	@	96	60	`
1	01	Start of heading	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	02	Start of text	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	03	End of text	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	04	End of transmit	36	24	$	68	44	D	100	64	d
5	05	Enquiry	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	06	Acknowledge	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	07	Audible bell	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	08	Backspace	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	09	Horizontal tab	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	0A	Line feed	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	0B	Vertical tab	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	0C	Form feed	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	0D	Carriage return	45	2D	–	77	4D	M	109	6D	m
14	0E	Shift out	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	0F	Shift in	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	Data link escape	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	Device control 1	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	Device control 2	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	Device control 3	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	Device control 4	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	Neg. acknowledge	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	Synchronous idle	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	End trans. block	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	Cancel	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	End of medium	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	Substitution	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	Escape	59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	File separator	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	|
29	1D	Group separator	61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	Record separator	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	Unit separator	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	□

24. ábra Az ASCII – kódolás

1.4.4. Jelek

1.4.4.1. A jel fogalma

A jel valamely fizikai mennyiség értéke vagy értékváltozása, amely információ megjelenítésére továbbítására vagy tárolására alkalmas. A mérnöki gyakorlatban a jeleket villamos mennyiséggé alakítjuk. Ez a leggyakrabban feszültség, ritkábban az áram. Ez a feszültség más fizikai mennyiséget reprezentálhat. Ezt gyakran kihasználjuk a méréstechnikában: például megfelelő szenzor segítségével a nyomás értéke feszültséggé alakítható.

példák jelekre:

- **Mozgás.** Egy jelet a gyakorlatban gyakran jellemez valamiféle mozgás, – például a porszemek mozgása egy zárt térben – ami egy egydimenziós jel (idő dimenzióban), de a mozgás tartománya általában háromdimenziós.
- **Hang.** Mivel egy hang egy közeg (például levegő) rezgése, a hanghoz bármelyik időpillanatban hozzárendelhetünk egy nyomás értéket, a hang jel analóg jel.
- **CD-k (Kompakt diszk).** A CD-k diszkrét jelekkel megjelenített hangot tartalmaznak, amelyet másodpercenként 44 100-szor vett minta alapján rögzítettek. Minden minta tartalmazza a jobb- és bal hangcsatorna jelét (mivel a CD-kre sztereó hangot rögzítenek).
- **Képek.** Egy kép minden pontjához egy színérték van hozzárendelve. Mivel ezek a pontok a síkban fekszenek, a tartomány kétdimenziós. Ha a kép egy fizikai objektum, mondjuk egy festmény, akkor ezek folyamatos jelek. Ha a kép egy digitális kép, akkor diszkrét jelek. A kép pontjait gyakran reprezentálják egy, az alapszínek különböző intenzitású összegéből álló értékkel, ekkor az ábrázolás háromdimenziós vektorokkal történik.
- **Videók.** Egy videojel valójában képek sorozata. Egy pont a videóban a kétdimenziós helyével, és az idő szerinti előfordulásával azonosítható, így egy videojel háromdimenziós tartomány.
- **Biológiai membrán potenciálok.** A biológiai jelek inkább elektromos potenciálok ("feszültségek"). Nagyon nehéz a tartományukat meghatározni. Néhány sejt vagy organizmus azonos membrán potenciál küszöbbel rendelkeznek; a neuronok különböző pontokon különböző potenciálokkal rendelkeznek. Ezek a jelek nagyon kis energiával rendelkeznek, és mérésükkel az elektrofiziológia foglalkozik.

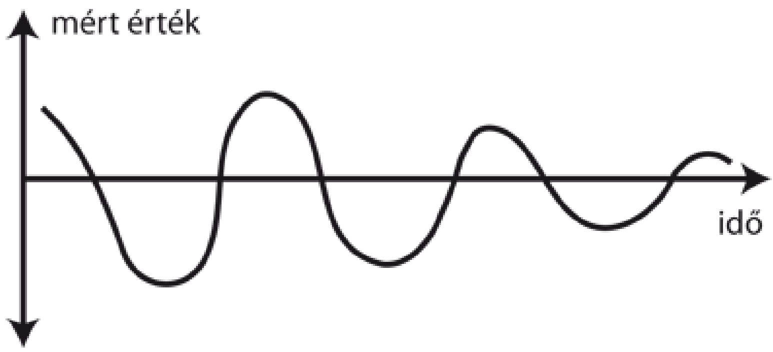
1.4.4.2. *A jel fajtái*

Alapvetően a jelek és rendszerek két csoportba oszthatók:

- Analóg
- Digitális

1.4.4.2.1. *Analóg rendszer*

Az analóg jel /rendszer /Időbeli lefolyása általában folytonos függvénnyel ábrázolható. Ezért pontosságát az elemek pontossága határozza meg. Az ilyen jelekből felépülő analóg rendszerek képesek a párhuzamos üzemre (több folyamat fut egyszerre). Ezért üzemeltetésük is olcsóbb. Az ilyen rendszer esetén az ember gép kapcsolat jó. (Révén, hogy az ember, mint organizmus is folytonos rendszernek tekinthető.) Képes a real – time / valós idejű üzemre. Ezeknél a rendszereknél azonban a logikai műveletek nehezen végezhetők el és a jeltárolás bonyolult. Az analóg áramkörök esetében a be- és kimeneti mennyiségek folytonosak, a rendszerre jellemező a fokozott zajérzékenység, de alkalmas folytonos jelek közvetlen feldolgozására.

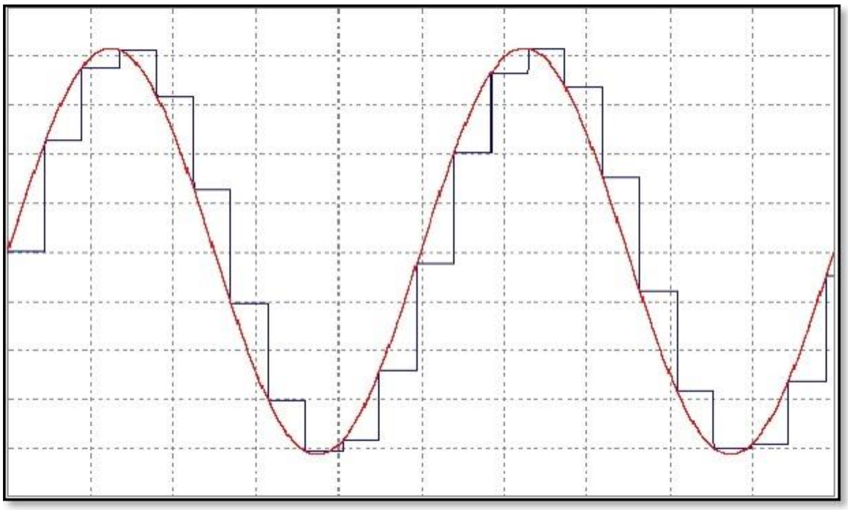


25. ábra Az analóg jel

1.4.4.2.2. *Digitális rendszer*

A digitális rendszer diszkrét, s ezt a diszkrét rendszert a diszkrét jel jellemzi, ahol az információt diszkrét jelképekben tartalmazó jelről beszélhetünk. A rendszer pontosságát az elemek pontossága határozza meg. A rendszer soros üzemre képes (a folyamatok egymás után futnak). Az üzemeltetése drágább és sok esetben az ember – gép kapcsolat sem ideális. Lassan végzi el a műveleteket, hiszen a numerikus approximáció elvét alkalmazza. Nagy lépésközökkel dolgozik a diszkrét jel miatt, ezért gyakran instabil. Viszont ilyen rendszerekben a logikai műveletek elvégzése egyszerű, és könnyű a jelet eltárolni.

A digitális áramkörök esetén a be- és kimeneti feszültségek csak diszkrét értékeket vehetnek fel. Az ilyen áramkörök adott mértékig érzéketlenek a zajokra. A rendszer digitális jelekkel végez műveleteket.



26. ábra A digitális jel és az analóg jel kapcsolata (digitális jel: kék)

Példák a digitális jelekre:

- A **jelzőtűz** talán a legegyszerűbb nem-elektronikus digitális jel, mely csupán két állapottal (be- és kikapcsolt állapot) rendelkezik. Talán a füstjel a digitális jel legősibb példája, melynél egy analóg „hordozót” (füst) modulálnak egy pokróccal, így hozva létre a digitális jeleket (füstgomolyagok), melyek az információt szállítják.
- A **DNS** négy alapérték (melyeket A-val, C-vel, T-vel és G-vel jelölnek) különböző kombinációit tartalmazza. Tehát a DNS felfogható úgy, mint egy négyes számrendszerben kódolt információforrás. Minden egyes érték valójában egy szerves molekula, úgynevezett nukleotid. A DNS a fő információ-átvivő rendszer két egymást követő generáció között. (A teljes igazsághoz hozzátartozik, hogy a DNS-ben a négyféle

nukleotid egymáshoz képesti térbeli elrendeződése is hordoz információt, nem beszélve a közöttük kialakuló másodlagos kötésekről.)

- **A morzekód** rendszere ötféle jel variációiból áll. Ezek a pont, vonás, rövid szünet (a betűk között), közepes szünet (szavak között) és a hosszú szünet (mondatok között). A morzekód rendszerének köszönhetően az így kódolt üzenetek többféle módon is eljuthatnak a címzetthez, azaz többféle közvetítő közeg is használható. Ilyenek az elektromosság (elektromos távíró) vagy a fény (villanófény).
- A **Braille** rendszer volt az első bináris formátumú karakterkódoló rendszer, mely egy hat bites kódot használt, és a kódolt karakterek mindegyikét pontokból álló mintázat alkotta. (A Braille rendszer vakok számára készült, a vakok „olvasását" teszi lehetővé.)
- A **szemaforj**elzéseknél rudakat vagy zászlókat tartanak meghatározott helyzetben, ezek kölcsönös helyzete kódolja az üzenetet, amit a megfigyelő adott távolságig képes észlelni (mivel látnia kell a jelet).
- A nemzetközi tengeri **jelzőzászlók** különböző jelei az ábécé különböző betűit jelképezik, ennek segítségével tudnak (tudtak) a hajók egymásnak üzenetet küldeni (látótávolságon belül).
- Egy, az előzőeknél sokkal inkább modernebb találmány a **modem**, amely egy analóg „hordozót" (a hangot) kódol át elektromos bináris digitális információvá. Vagyis a hangot úgy alakítja át, hogy belőle bináris digitális hangimpulzusok hosszú sora keletkezik, ezek hordozzák az információt. Hasonló elven működtek a régi, magnószalagos otthoni számítógépek is.

1.5. A logikai algebra

1.5.1. A logikai algebra alapfogalmai

1.5.1.1. Definíciók

A formális logika nagyon régen, már az ókori Görögországban kialakult. Atyjának a görög filozófust, Arisztotelészt tekinthetjük. A görög filozófus és gondolkodó igazi polihisztor volt , a az emberi megismerés és a retorika éppen úgy foglalkoztatta, mint a biológia kulcskérdései (Írt könyvet a növényekről az állatok keletkezéséről és mozgásáról is). A mai tudomány azonban a legtöbbet mégis a korrekt, objektív filozófiai gondolkodás területén köszönheti neki: a mai tudományos gondolkodás egyik fő alappillére a formális logika, melyet ő hozott létre. Később igen nagy földrajzi területen terjedt el ez a fajta gondolkodásmód, így válhatott a mai tudomány részévé. Elterjedésében nagy szerepe volt a makedón Nagy Sándornak, akinek Arisztotelész, királyi atyja kérésére nagyon sokáig nevelője, kísérője és bizalmasa volt.

A formális logika igyekszik az emberi gondolkodás folyamatait megfigyelni, szabályait lefektetni. Törekszik ezeknek a szabályoknak a minél pontosabb megfogalmazására. Célja az ismeretek feldolgozása, értelmezése oly módon, hogy állításokat (premisszákat) kapcsol össze, és ezekből következtetéseket (konklúziók) von le.

A logikai algebrában ez a formális logika némileg módosul néhány egyszerűsítés révén.

Ezek az egyszerűsítések a következők:

- Egy állítás vagy IGAZ vagy HAMIS.
- Egy esemény bekövetkezik vagy nem.
- tehát egy eseményt logikai változóként kezelhetünk, amely két értéket vehet fel.

A logikai algebra tehát csak kétértékű logikai változók halmazára értelmezett. A logikai változók tehát két csoportba oszthatók, úgymint

- független-, és
- függő változókra.

Mindkét csoport tagjait a latin ABC nagy betűivel (A, B, C . . . X, Y, Z) jelöljük. Általában az ABC első felébe eső betűkkel a független, az utolsó betűk valamelyikével pedig a függő változókat jelöljük.

A változók két logikai értéke az IGAZ, ill. a HAMIS érték. Ezeket 1-el, ill. 0-val jelöljük.

(IGAZ: 1; HAMIS: 0).

A logikai változókat azért használjuk íly módon, mert így bináris számrendszerben jól szimbolizálhatók.

IGAZ	HAMIS
TRUE	FALSE
HIGH	LOW
1	0

27. ábra A logikai változók értékei

A Boole –algebra megalkotása tehát George Boole angol matematikus és Augustus De Morgan nevéhez fűződik. Gyakorlatilag egy olyan halmazelméleti tárgyalási módról van szó, amelyben az elemek száma kettő (hamis és igaz).

Az elemek jelölésére használt 0 és 1 tehát nem számjegyek, hanem szimbólumok, amihez a hamis és igaz értéket rendeljük.

Megjegyzendő, hogy a gyakorlatban ez valós fizikai mennyiségekhez is kapcsolható: van e az adott áramkörszakasz két pontja között feszültség, vagy folyik – e áram.

1.5.1.2. *Axiomák*

Az axiómák olyan előre rögzített kikötések, alapállítások, amelyek az algebrai rendszerben mindig érvényesek, viszont nem igazolhatók. Ezen állítások a halmaz elemeit, a műveleteket, azok tulajdonságait stb. határozzák meg. A tételek viszont az axiómák segítségével bizonyíthatók.

A Boole - algebra a következő axiómákra épül:

1. Az algebra kétértékű elemek halmazára értelmezett.
2. A halmaz minden elemének létezik a komplemense is, amely ugyancsak eleme a halmaznak.
3. Az elemek között végezhető műveletek a

   konjunkció (logikai ÉS – metszet művelet), illetve a

   diszjunkció (logkai VAGY – unió művelet).

4. A logikai műveletek:

Kommutatívak (a tényezők felcserélhetők),

Asszociatívak (a tényezők csoportosíthatók),

Disztributívak (a két művelet elvégzésének sorrendje felcserélhető).

5. A halmaz kitüntetett elemei az

egység elem (értéke a halmazon belül mindig IGAZ), és a

Nulla elem (értéke a halmazon belül mindig HAMIS).

A logikai algebra a felsorolt axiómákra épül.

A logikai feladatok technikai megvalósításához a halmaz egy elemének komplemensét képező művelet is szükséges. Ezért a műveletek között a logikai TAGADÁS (NEM) is szerepel.

1.5.1.3. A logikai mennyiségek leírásának módjai

A logikai mennyiségeket többféle formában tudjuk ábrázolni.

Ez az ábrázolás történhet:

- algebrai alakban
- grafikus alakban
- igazságtáblázattal
- idődiagram segítségével
- szimbolikus jelekkel
- utasításlistával

1.5.1.3.1. Algebrai alak

Egyenlőség formájában adjuk meg a mennyiség logikai értékét.

Pl.:

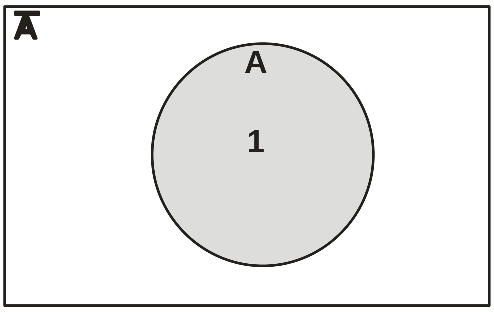
$$Y = A+B$$

1.5.1.3.2. Grafikus alak

A halmazok és a rajtuk értelmezett műveletek jól szemléltethetők (a J. Venn és Veitch matematikusról elnevezett) diagramokkal is. A teljes halmazt egy négyzettel, míg a részhalmazokat egy zárt alakzattal célszerűen egy körrel (Venn diagramban) vagy egy téglalappal (Veitch diagramban) jelölik.

- **Venn diagram**

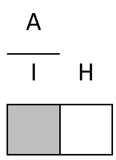
A Venn diagramot az előzőekben már sikerült bemutatni halmazok kapcsán. Itt most csak a kétváltozós esetre mutatunk egy példát.



28. ábra A logikai halmaz Venn diagramja

- **Veitch-diagram**

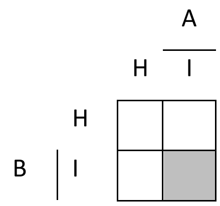
A Veitch diagramban minden változóhoz a teljes halmaz (esemény-tér) fele, míg a másik térfél a változó tagadottjához tartozik. Az ábra egyváltozós halmazt ábrázol. A peremezésnél **vonalak** jelzik, hogy az egyes változók melyik térfelén IGAZ értékűek.



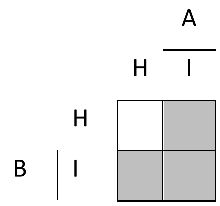
29. ábra Egy változós Veitch iagram

Az ábra a metszésnek (ÉS művelet) azt a változatát szemlélteti, amelyik mindegyik változó igaz értékének közös területe. Ez metszi ki a legkisebb elemi területet, ezért nevezik ezt mintermnek. A másik ábrán az összes változó valamely értékeihez tartozó együttes terület. Az egyesített terület a legnagyobb részterület, amelyet maxtermnek neveznek.

Mind a két kitüntetett területből 2^n – en darab van, ahol n a változók száma.



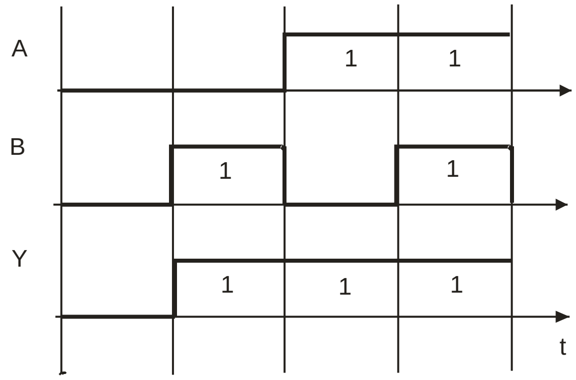
30. ábra Veitch diagram két változóval - minterm : Metszet (ÉS)



31. ábra Veitch diagram két változóval - maxterm: Unió (VAGY)

1.5.1.3.3. Idődiagram

A logikai változó értéke grafikusan ábrázolva az idő függvényében.



32. ábra Az idődiagram

1.5.1.3.4. Igazságtáblázat

Az igazságtáblázat a változók táblázatba rendezése, ahol azok minden érték kombinációja szerepel.

Az igazságtáblázatnak annyi oszlopa lesz, ahány független ill. függő változónk van. Az igazságtáblázat bal oldalán adjuk meg a bemeneti vagy független változók értékét, míg jobb oldalán a kimenetei vagy függő változó értékei szerepelnek.

A táblázat sorainak számát úgy határozhatjuk meg, hogy tudjuk, minden változó csak két értéket vehet fel, ezért n **független!** változó esetén összesen 2^n különböző kombináció különböztethető meg (2 elemből álló n-ed osztályú ismétléses variáció!). Így két változó esetén az összes lehetséges kombinációk száma négy. Tehát a sorok száma kettő hatványából számolható. Ugyanez az összefüggés adja meg a Veitch – diagram négyzeteinek (mintermeinek) a számát is, ez a kapcsolta a kétféle ábrázolás között!!

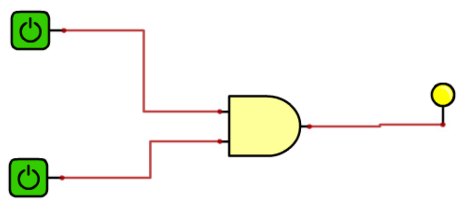
Az igazságtáblázat egy sora a független változók adott kombinációját és az ehhez tartozó függvény értékét adja. Az **egy sorban levő** értékeket az ÉS művelettel lehet összekapcsolni. A különböző sorok pedig különböző esetnek megfelelő variációkat írnak le. Tehát egy adott időpillanatban vagy az egyik sor vagy egy másik sor variációja érvényes. A **sorok** logikai kapcsolata éppen ezért a VAGY művelettel írható le.

B	A	Y
0	0	
0	1	
1	1	
1	1	

33. ábra Igazságtáblázat

1.5.1.3.5. *Szimbolikus jelek*

A változók kapcsolatainak szimbólumok felelnek meg (kapcsolási rajz)



1.5.1.3.6. *Utasításlista*

A változók közötti kapcsolatot utasításokkal fogalmazzuk meg (Assembly, VHDL)

Pl.:

```
Y <= A or B
```

1.5.1.4. A logikai algebra műveletei

1.5.1.4.1. A logikai ÉS (metszet) / AND kapcsolat

Az ÉS kapcsolat estén minden állításnak igaznak kell lennie ahhoz, hogy a következtetés is igaz legyen

Másként fogalmazva az egyik ÉS a másik ÉS az n.-edik állításnak is igaznak kell lennie, hogy a következtetés is igaz legyen

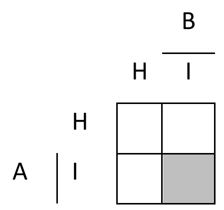
Pl:

Ha Dénes és Sándor egy napon születtek és azonosak a szüleik, akkor Dénes és Sándor ikrek

- **algebrai alakban – Logikai szorzás**

$$Y = A \cdot B = AB = A\&\&B$$

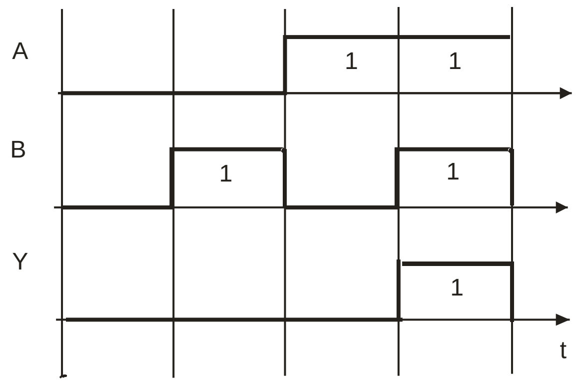
- **grafikus alakban**



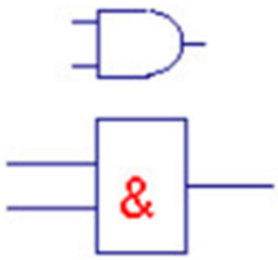
- **igazságtáblázattal**

B	A	Y = AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

❖ **idődiagram segítségével**



❖ **szimbolikus jelekkel**



❖ **utasításlistával**

Y <= A and B

1.5.1.4.2. Logikai VAGY (unió) / OR kapcsolat

A halmazelméletben ezt a kapcsolatot tekintjük unió műveletnek: azaz az adaott elem VAGY egyik, Vagy másik halmaznak eleme kell legyen. Azaz a logika szabályai szerint Legalább egy állításnak igaznak kell lennie ahhoz, hogy a következtetés is igaz legyen. Másként úgy is fogalmazhatunk

VAGY az 1, 2 VAGY az n-edik állításnak igaznak kell lennie, hogy a következtetés is igaz legyen.

Pl.:

Ha Judit és Sándor apja vagy anyja azonos, akkor Judit és Sándor testvérek.

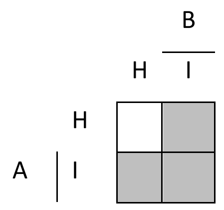
- **algebrai alak – Logikai <u>összeadás</u>**

Y = A+B = A || B

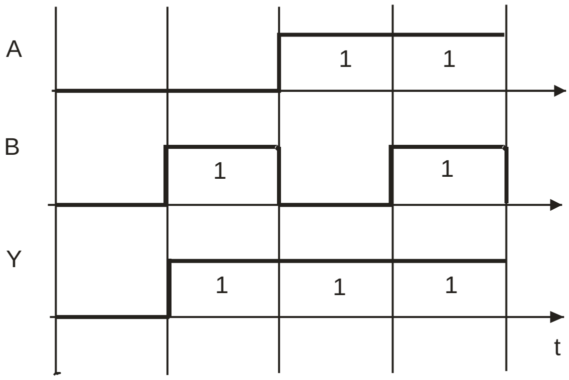
- **igazságtáblázat**

B	A	Y = A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

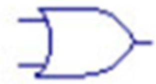
- **grafikus alak**

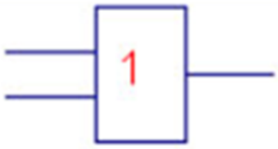


- **idődiagram**



- **szimbolikus jelek**





- **utasításlista**

Y <= A or B

1.5.1.4.3. A logikai tagadás (inverzió) kapcsolata

A logikai tagadásesetén egy állítás igaz, akkor a következtetés hamis. másként fogalmazva: ha egy állítás hamis, akkor a következtetés igaz.

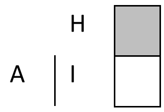
Pl:

Ha holnap esik az eső, akkor (nem) megyünk kirándulni

- **algebrai alakban**

$$Y = \overline{A} = !A$$

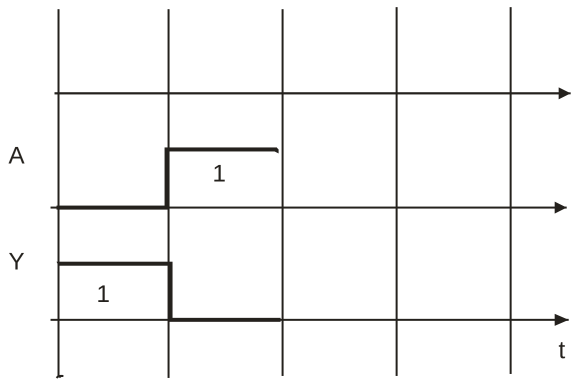
- **grafikus alakban**



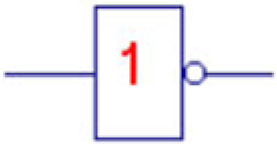
- **igazságtáblázattal**

A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

- **idődiagram segítségével**



- **szimbolikus jelekkel**



- **utasításlistával**

Y <= not A

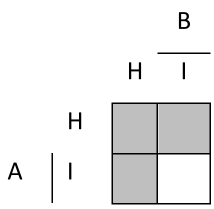
1.5.1.4.4. NAND kapu / NEGÁLT ÉS

A NAND kapu esetén ha egy állítás igaz és a másik hamis, akkor a következtetés igaz. Ha viszont mindkét állítás igaz, akkor a következtetés hamis.

- **algebrai alakban**

$$Y = \overline{A \cdot B} = \overline{A \cdot B}$$

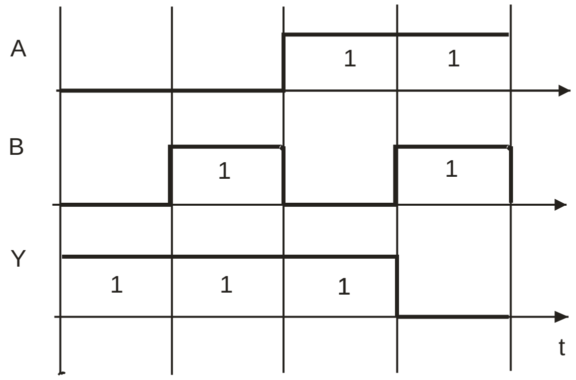
- **grafikus alakban**



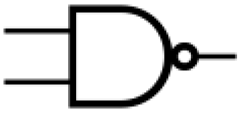
❖ **igazságtáblázattal**

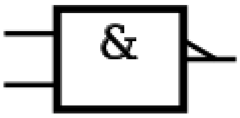
B	A	Y = A nand B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

❖ **idődiagram segítségével**



❖ **szimbolikus jelekkel**





❖ **utasításlistával**

Y <= A NAND B

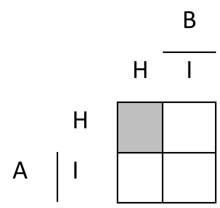
1.5.1.4.5. *NOR kapu / Negált vagy*

Ebben az esetben a következtetés csak akkor lesz igaz, ha mindkét állítás hamis.

- **algebrai alakban**

$$Y = \overline{A + B}$$

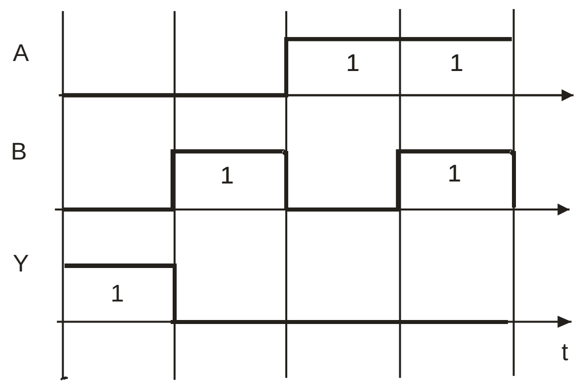
- **grafikus alakban**



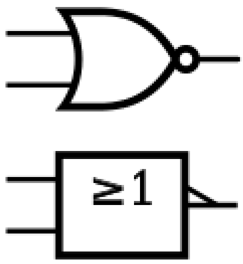
- **igazságtáblázattal**

B	A	Y = A nor B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- **idődiagram segítségével**



❖ **szimbolikus jelekkel**



❖ **utasításlistával**

Y <= A nor B

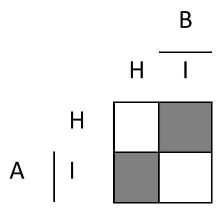
1.5.1.4.6. XOR kapu / EXOR vagy MOD2 (kizáró vagy, antivalencia)

Ha mindkét állítás igaz vagy hamis akkor a következtetés hamis.

❖ **algebrai alakban**

$$Y = A \oplus B$$

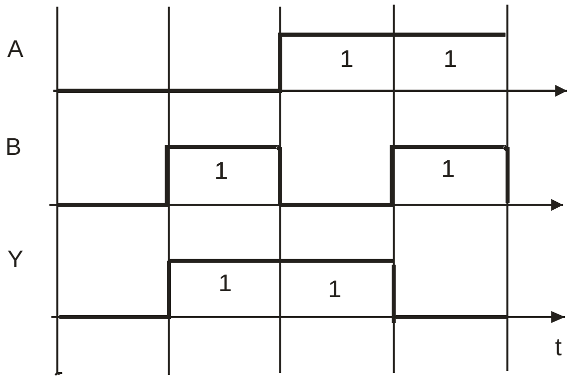
❖ **grafikus alakban**



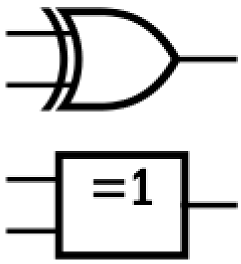
❖ **igazságtáblázattal**

B	A	Y = $A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- **idődiagram segítségével**



- **szimbolikus jelekkel**



- **utasításlistával**

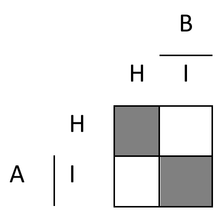
Y<= A xor B

1.5.1.4.7. *XNOR vagy EXNOR kapu (negált kizáró vagy, ekvivalencia)*

- **algebrai alakban**

$$Y = \overline{A \oplus B}$$

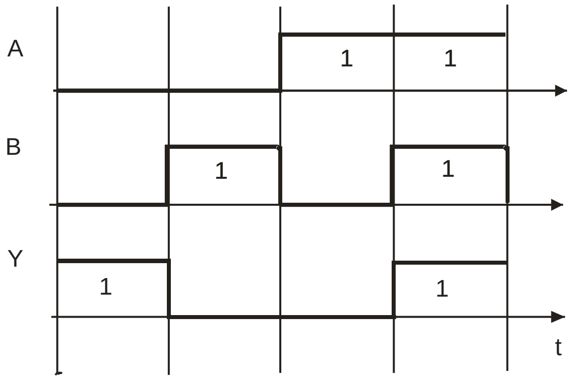
- **grafikus alakban**



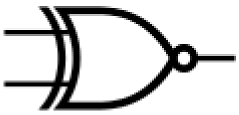
- **igazságtáblázattal**

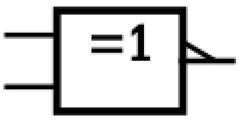
B	A	Y = $\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **idődiagram segítségével**



- **szimbolikus jelekkel**





- **utasításlistával**

Y<= A XNOR B

1.5.1.1. *A logikai műveletek tulajdonságai*

Az átalakításokhoz szükséges

1.5.1.1.1. *Állandókkal és változókkal végzett műveletek*

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$
3. $A \cdot 0 = 0$
4. $A \cdot 1 = A$

VAGY művelet:

0	+	**0**	=	**0**
0	+	**1**	=	**1**
1	+	**0**	=	**1**
1	+	**1**	=	**1**

ÉS művelet:

0	·	**0**	=	**0**
0	·	**1**	=	**0**
1	·	**0**	=	**0**
1	·	**1**	=	**1**

Negálás:

$\overline{0} = 1$

$\overline{1} = 0$

Kétszeres negálás:

$\overline{\overline{0}} = 0$ $\overline{\overline{1}} = 1$ $\overline{\overline{A}} = A$

1.5.1.1.2. *Együtthatás, ugyanazon változóval végzett műveletek*

1. $A + A = A$
2. $A + A + A + A + \cdots + A = A$
3. $A \cdot A = A$

4. $A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot \ldots . \cdot A = A$
5. $A + \overline{A} = 1$
6. $A \cdot \overline{A} = 0$

Abszorbciós tétel:

1. $A + A \cdot B = A$
2. $A \cdot (A + B) = A$

De Morgan azonosság

1. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
2. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

1.5.1.1.3. Alaptételek, műveletek tulajdonságai:

- **Kommutativitás (felcserélhetőség)**

$$A + B = B + A$$
$$A \cdot B = B \cdot A$$

- **Asszociatív tulajdonság (társíthatóság)**

$$A + (B + C) = (A + B) + C = (A + C) + B = A + B + C$$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = (A \cdot C) \cdot B = A \cdot B \cdot C$$

- **Disztributivitás**

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

1.5.1.2. Az igazságtáblázat használata: a rendszer egyenletének felírása

A logikai függvények olyan matematikai leképezések, melyek a 0 és 1 számokból álló véges sorozatokhoz rendelik a 0 vagy 1 számot.

Az igazságtáblázatból két módszerrel lehet felírni a feladat teljes alakú logikai függvényeit.

Az alábbi példa kapcsán ismerkedjünk meg a módszerekkel, valamint a teljes alakú (diszjunkt, ill. konjunkt) függvény-formákkal.

Példaként vegyük a következő, három független változót tartalmazó igazságtáblát.

C	B	A	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

1.5.1.2.1. A diszjunkt - alakú függvény felírása.

Az igazságtáblázat tartalmát a következőképpen olvassuk ki.

A Y jelű függő változó értéke 1 (IGAZ), akkor ha

C	B	A	Y
0	0	0	0
0	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	**1**	**0**	**1**
1	1	1	0

- ha C=0 és B=0 és A=1 (2.sor),vagy
- ha C=0 és B =l és A=0 (3.sor),vagy
- ha C=0 és B=1 és A=1 (4.sor),vagy
- ha C=l és B=l és A=0 (7.sor).

A felírás szabálya a következő:

1) **azokat a sorokat kell figyelembe venni, amelyeknél a függő változó értéke 1;**
2) **az egy sorban levő független változók között ÉS műveletet kell végezni, ahol független változó igaz (egyenes, más kifejezéssel ponált) alakban írandó, ha értéke 1 és tagadott (negált) alakban, ha értéke 0;**
3) **az egyes sorokat leíró ÉS műveletű rész-függvények VAGY művelettel kapcsolódnak egymáshoz.**

Tehát a függvény:

- Soronként

$$Y1 = A\overline{BC}$$

$$Y2 = \overline{A}B\overline{C}$$

$$Y3 = AB\overline{C}$$

$$Y4 = \overline{A}BC$$

- A teljes függvény

$$Y = A\overline{BC} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}BC$$

Nézzük most meg az igazságtáblázatból felírt logikai függvény általános jellemzőit. A függvény rendezett ÉS-VAGY alakú. Az ÉS művelettel összekapcsolt részekben mindegyik változó szerepel egyenes vagy tagadott alakban, vagyis a Veitch diagramnál definiált minterm.

Az egyes mintermek között pedig VAGY műveleteket kell végezni. Az ilyen függvényalakot idegen szóval diszjunktiv kanonikus alaknak (teljes diszjunktiv normál formának) nevezzük.

1.5.1.2.2. A konjunkt alakú függvény felírása.

A Y jelű függő változó értéke 0 (HAMIS), akkor ha

C	B	A	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- ha C=0 és B=0 és A=0 (1.sor) vagy
- ha C=1 és B=0 és A=0 (5.sor) vagy
- ha C=1 és B=0 és A=1 (6.sor) vagy
- ha C=1 és B=1 és A=1 (8.sor).

Tehát a függvény, ha az előbbi módszert követjük:

- Soronként

$$\overline{Y4} = \overline{ABC}$$

$$\overline{Y2} = \overline{AB}C$$

$$\overline{Y3} = A\overline{B}C$$

$$\overline{Y}4 = ABC$$

- A teljes függvény

$$\overline{Y} = \overline{ABC} + \overline{AB}C + A\overline{B}C + ABC$$

De nekünk azonban ennek a komplementerére van szükségünk:

$$\overline{\overline{Y} = \overline{ABC} + \overline{AB}C + A\overline{B}\,C + ABC}$$

Mi az eredeti függvényt szeretnénk megkapni, ezért át kell alakítani. Ehhez a de Morgan azonosságokat használjuk fel.

$$Y = \left(\overline{\overline{ABC}}\right)\left(\overline{\overline{AB}C}\right)\left(\overline{A\overline{B}C}\right)\left(\overline{ABC}\right)$$

$$Y = (A + B + C)\left(A + B + \overline{C}\right)\left(\overline{A} + B + \overline{C}\right)\left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\right)$$

A felírás szabálya ezért a következő:

1) **azokat a sorokat vesszük figyelembe, melyekben a függő változó értéke 0;**
2) **az egy sorban levő független változók között VAGY kapcsolatot írunk elő;**
3) **a független változót egyenes alakban írjuk, ha értéke 0 és tagadott alakban, ha értéke 1;**
4) **az egyes sorokat leíró VAGY függvényeket ÉS művelettel kell összekapcsolni.**

A kapott függvényt elemezve, megállapíthatjuk, hogy annyi tényezőt (zárójeles mennyiséget) kaptunk, ahány helyen 0 értékű az Y. A zárójeles mennyiségek mindhárom független változót (A,B,C) tartalmazzák egyenes vagy tagadott alakban, és VAGY művelet változói. Ezek maxterm -ek, melyeket a Veitch diagramnál definiáltunk. Az első maxterm az igazságtáblázat első sora szerinti állítás - vagyis, hogy az A=0 és B=0 és C=0 - tagadása. A további tagokat vizsgálva látjuk, hogy ezek is egy-egy olyan sornak a tagadásai, melyben Y=0.

Azt a logikai függvényt, amely maxtermek logikai szorzata idegen szóval konjunktív kanonikus alakúnak, rendezett VAGY-ÉS függvénynek (teljes konjunktív normál alakúnak) nevezzük.

1.6. Ellenőrző kérdések

1) Definiálja a komplemens fogalmát!
2) Definiálja az unió fogalmát!
3) Definiálja a metszet fogalmát!
4) Írja fel a De Morgan azonosságot!
5) Írja fel a halmazműveleti azonosságokat!
6) Mi jellemzi az analóg rendszert?
7) Mi jellemzi a digitális rendszert?
8) Definiálja a logikai függvény fogalmát!
9) Melyek a logikai algebra axiómái?
10) Hogyan tudjuk leírni a logikai függvényeket?
11) Hogyan készítjük el egy rendszer igazságtáblázatát?
12) Jellemezze a logikai AND kaput!
13) Jellemezze a logikai OR kaput!
14) Jellemezze a logikai NOT kaput!
15) Jellemezze a logikai NAND kaput!
16) Jellemezze a logikai NOR kaput!
17) Jellemezze a logikai XOR kaput!
18) Jellemezze a logikai XNOR kaput!
19) Hogyan olvassuk ki a logikai függvény diszjunkt alakját az igazságtáblázatból?
20) Hogyan olvassuk ki a logikai függvény konjunkt alakját az igazságtáblázatból?
21) Ismertesse a logikai műveletek általános tulajdonságait!

1.7. Feladatok

1) Legyen adott egy H = {–1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10} alaphalmaz, továbbá az A = {1; 2; 3; 5; 7; 9} és B = {3; 4; 5; 6; 8} halmazok. A halmaz elemeinek a felsorolásával adjuk meg a következőket: $C1 = A \cup B$, $C2 = A \cap B$, $C3 = A-B$ $C4 = B \cup H$. Ábrázolja a feladatot Venn diagramon!
2) Egy felmérés során 100 embert megkérdeztek, hogy milyen forrásból szerzik a híreket. A következő eredmény született: tévéből 65, rádióból 38, újságból 39, tévéből és rádióból 20, tévéből és újságból 20, rádióból és újságból 9, tévéből, rádióból és újságból 6. Hányan nem szerzik a híreket a felsoroltak közül egyik forrásból sem? Hányan vannak, akik csupán egy forrásból szerzik a híreket a három közül?
3) Alakítsa át a tízes számrendszerbeli számokat kettes számrendszerbe, majd ellenőrizze az eredményt: a, 126; b, 127; c, 125; d, 4097; e, 5000
4) Alakítsa át a kettes számrendszerbeli számokat tízes számrendszerbe, majd ellenőrizze az eredményt: a, 10100; b, 1110011; c, 0001; d, 11111; e, 0110011
5) Mennyi 16K pontos értéke?
6) A digitális alapjel (bit) két értéke alapján határozzuk meg, hány különböző kódszót (bitmintát) lehet előállítani öt bites kódszavakkal?
7) Egy rúd hosszáról kell digitális jellel információt adni a gyártás során. A rúdhossz három tartományát kell megkülönböztetni:

   $l < 18$ cm

   18 cm $<= l < 20$ cm

   20 cm $<= l$

   Legalább hány bites kódszavakat kell használnunk? Lesz-e felhasználatlan, kihasználatlan kódszó?
8) Készítse el a logikai kapuk tulajdonságainak összefoglaló táblázatát valamennyi ábrázolási lehetőséget feltüntetve!
9) Készítse el a logikai kapuk igazságtáblázatát 3 független és egy függő változóra!
10) Készítse el a logikai kapuk igazságtáblázatát 4 független és egy függő változóra!

1.8. Irodalom

Kóré László: Digitális elektronika I. (BMF 1121)

Zsom Gyula: Digitális technika I. (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000, KVK 49-273/I, ISBN 963 6 1786 6)

Zsom Gyula: Digitális technika II. (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000, KVK 49-273/II, ISBN 963 16 1787 4)

Arató Péter: Logikai rendszerek tervezése (Tankönyvkiadó, Budapest, 1990, Műegyetemi Kiadó 2004, 55013)

Zalotay Péter: Digitális technika (http://www.kobakbt.hu/jegyzet/DigitHW.pdf)

Rőmer Mária: Digitális rendszerek áramkörei (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989, KVK 49-223)

Rőmer Mária: Digitális technika példatár (KKMF 1105, Budapest 1999)

Matijevics István: Digitális Technika Interaktív példatár (ISBN 978-963-279-528-7 Szegedi Tudományegyetem)

http://www.inf.u–szeged.hu/projectdirs/digipeldatar/digitalis_peldatar.html