Óbudai EGYETEM
Universitas Budensis

Neumann János INFORMATIKAI KAR

# Irányítástechnika
# 2. előadás

**Dr. Kovács Levente**

**2013. 03. 19.**

# Tartalom

- Tipikus vizsgálójelek és azok információtartalma
- Laplace transzformáció, állapotegyenlet, átviteli függvény
- Alaptagok leírása
- Alaptagok kapcsolása

# Tartalom

- Tipikus vizsgálójelek és azok információtartalma
- Laplace transzformáció, állapotegyenlet, átviteli függvény
- Alaptagok leírása
- Alaptagok kapcsolása

# Tipikus vizsgálójelek és azok információtartalma

- Lineáris idő-invariáns rendszer felírása
- Tipikus bemenőjelek
- Kapcsolat a súlyfüggvény és az átmeneti függvény között
- Amplitúdó – fázis függvény
- Nyquist diagram
- Különböző vizsgálójelek információtartalma

# Lineáris idő-invariáns rendszer felírása

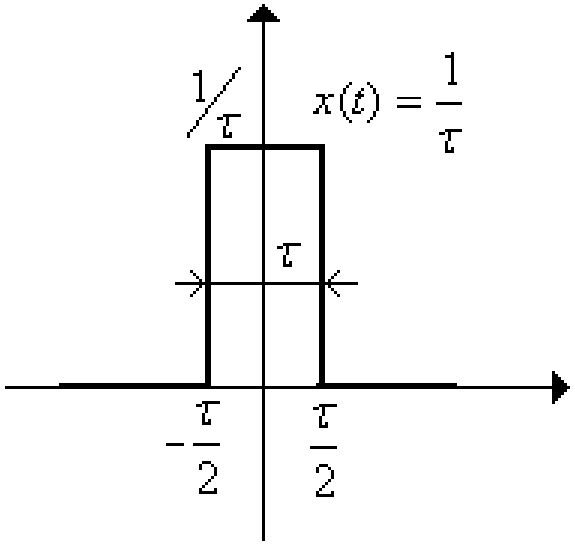
- Bármely lineáris idő-invariáns rendszer felírható a következő n-edrendű differenciálegyenlettel:

$$A_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_0 y(t) = B_0 x(t) + \ldots + B_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

# Tipikus bemenőjelek

- **Dirac - impulzus**

$$x(t) = \delta(t)$$



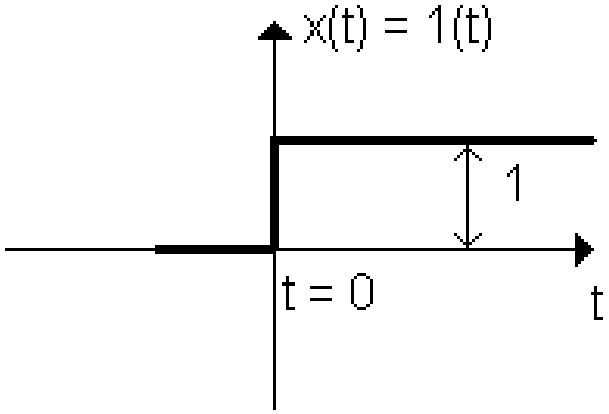

Ha a bemenőjel dirac-impulzus, akkor a kimenőjel *súlyfüggvény*.

$$y(t) = w(t)$$

# Tipikus bemenőjelek

- **Egységugrás**

$$x(t) = 1(t)$$

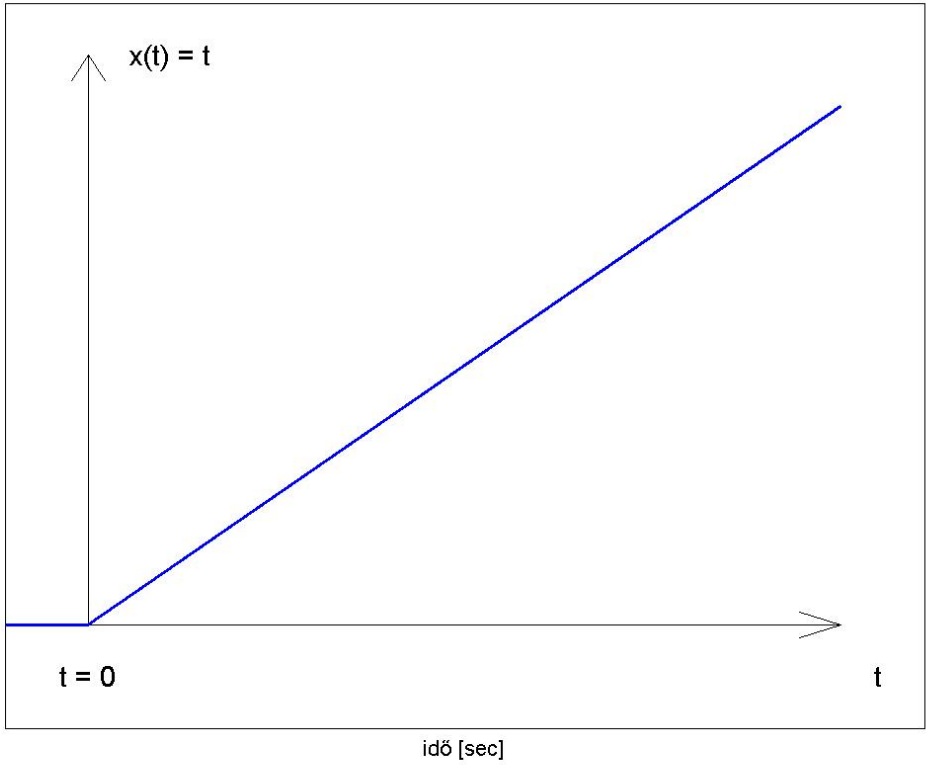



Ha a bemenőjel egységugrás, akkor a kimenőjel *átmeneti függvény*.

$$y(t) = v(t)$$

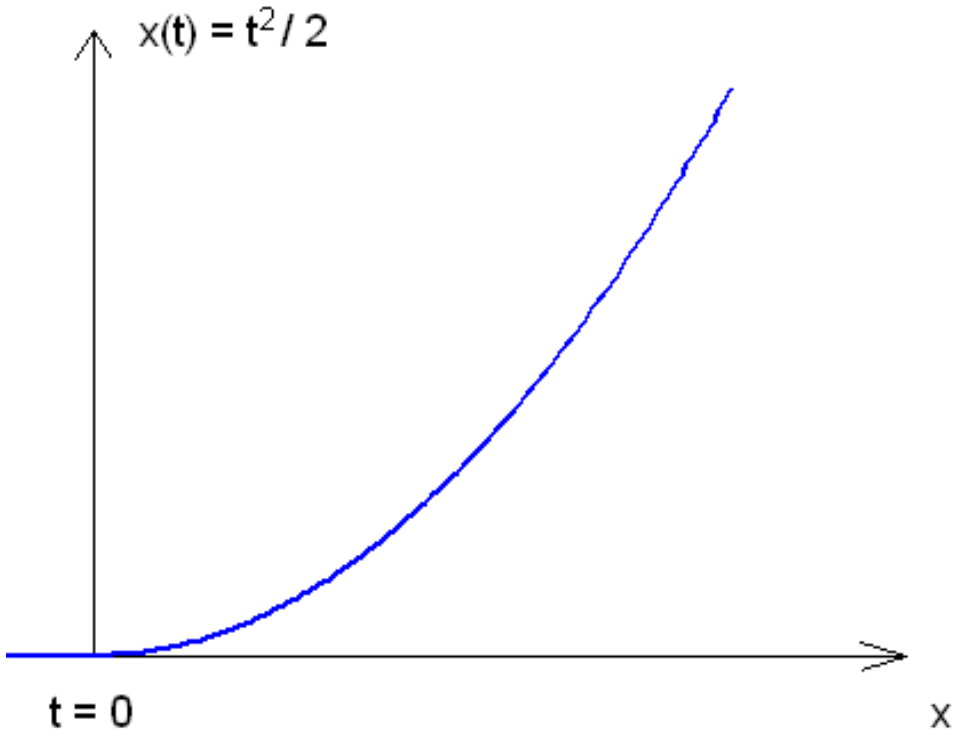
# Tipikus bemenőjelek

- **Egység sebességugrás**



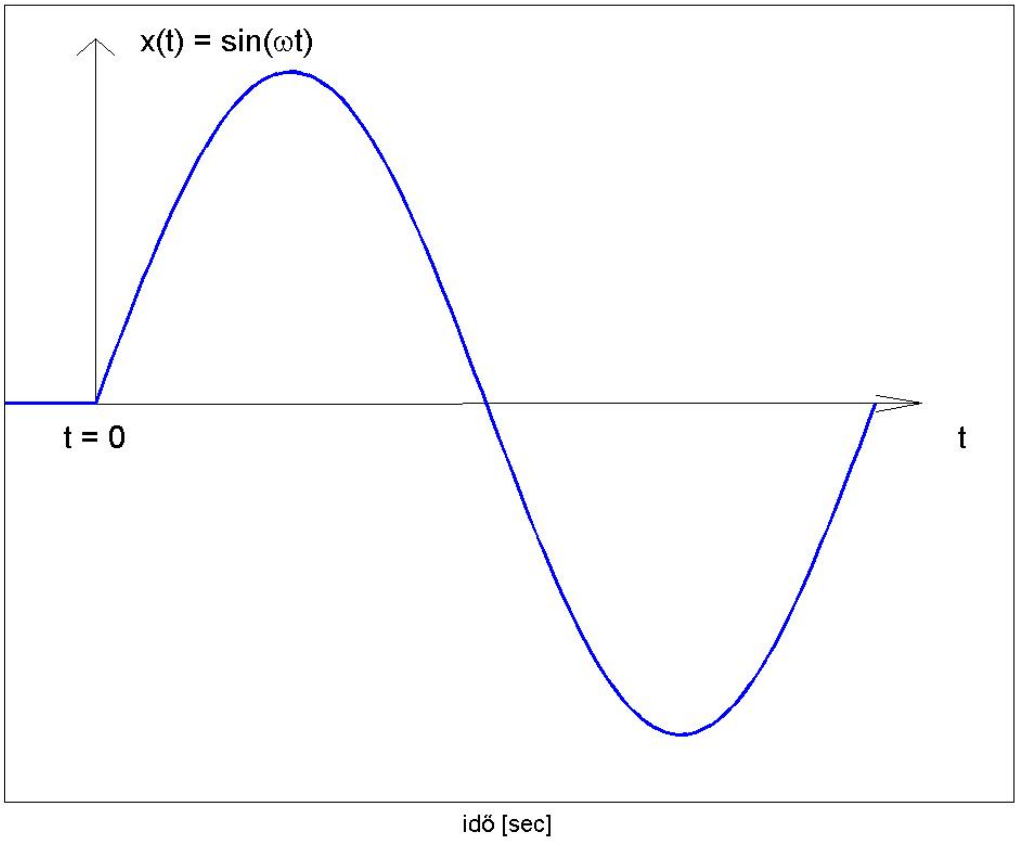
# Tipikus bemenőjelek

- **Egység gyorsulásugrás**



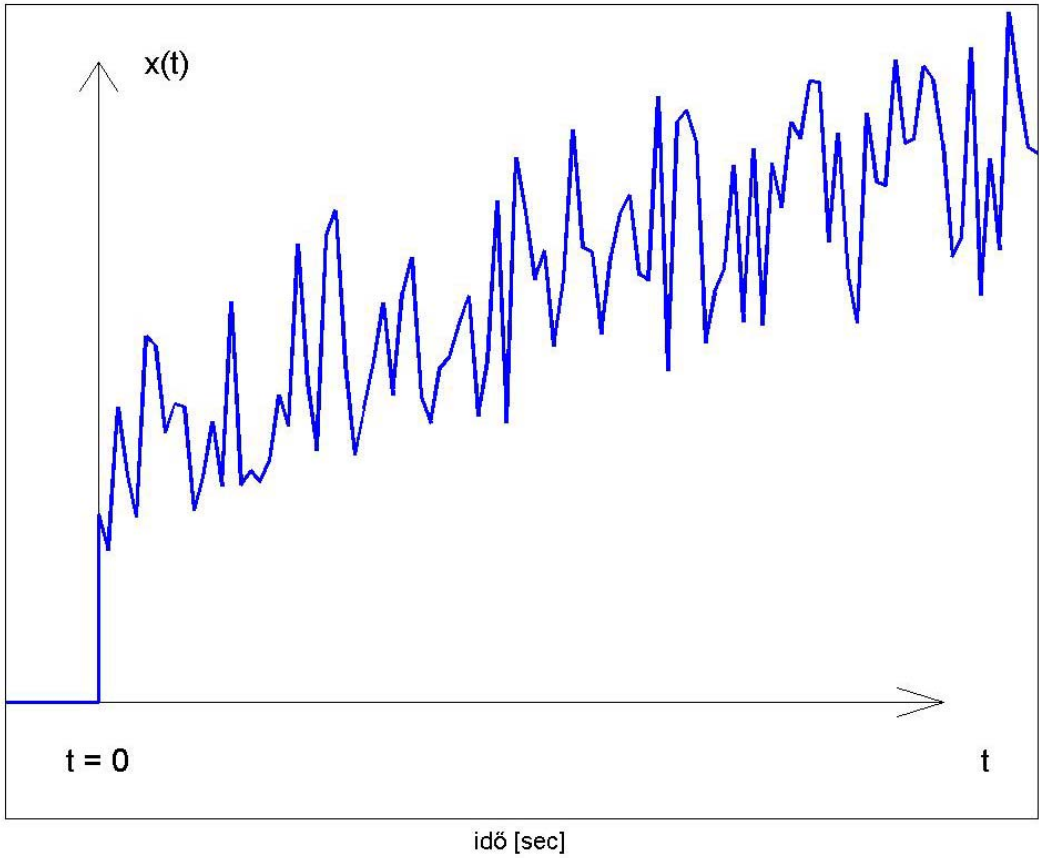
# Tipikus bemenőjelek

- **Szinuszos gerjesztő függvény**



# Tipikus bemenőjelek

- **Véletlenszerű gerjesztés**



# Kapcsolat a súlyfüggvény és az átmeneti függvény között

$$w(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \int_0^t w(t)dt$$

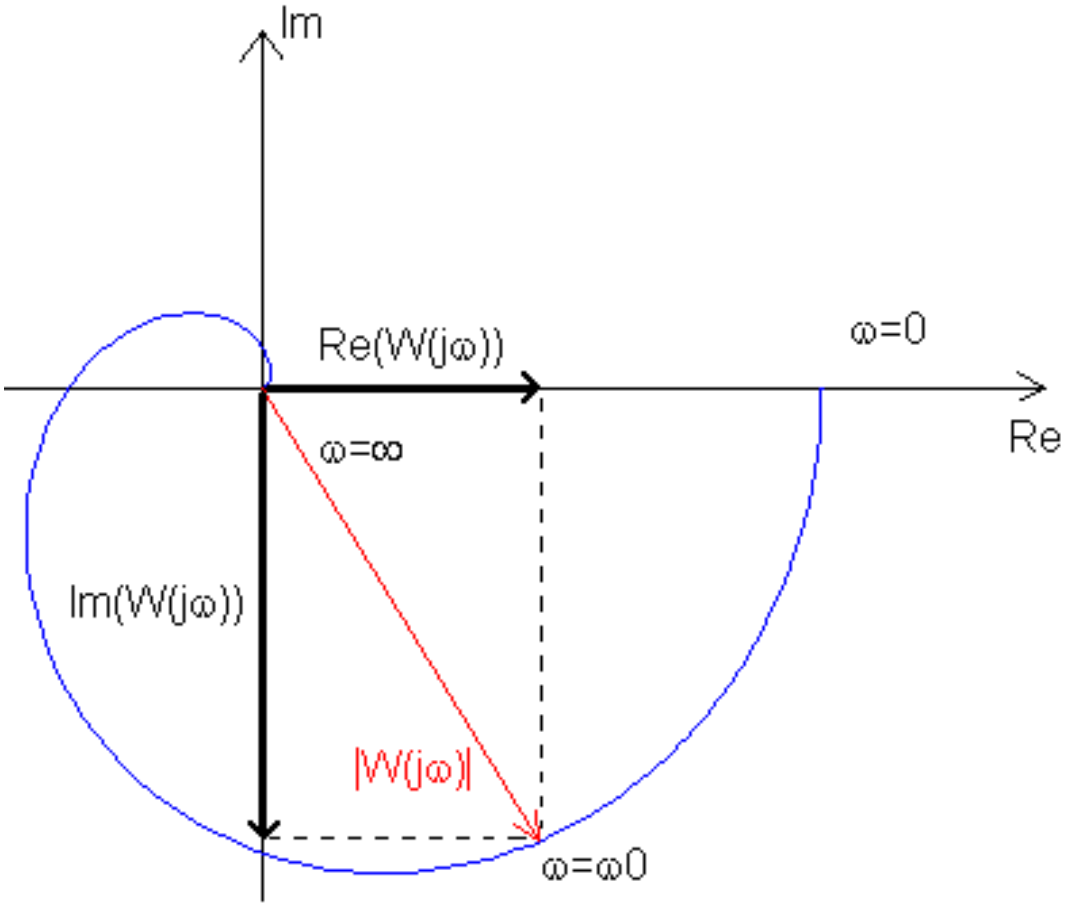
# Amplitúdó – fázis függvény

$$W(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{B_0 + jwB_1 + \ldots + (jw)^m B_m}{A_0 + jwA_1 + \ldots + (jw)^n A_n}$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B_0 + sB_1 + \ldots + s^m B_m}{A_0 + sA_1 + \ldots + s^n A_n}$$

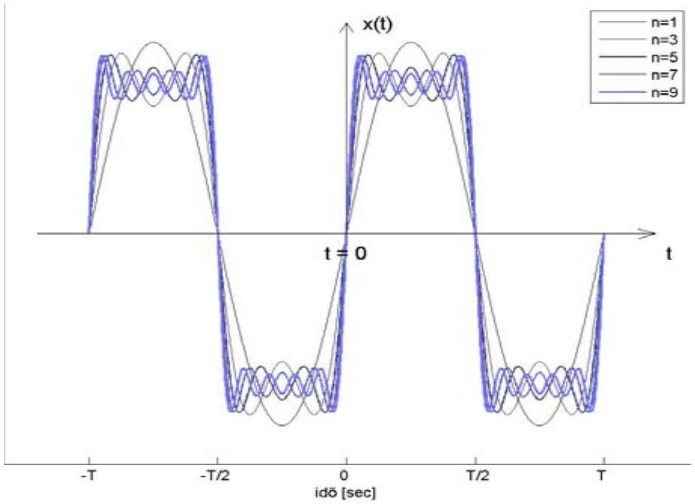
$$n \geq m$$

# Nyquist diagram



# Különböző vizsgálójelek információtartalma

- Tetszés szerinti „T” periódusidejű periodikus függvénynek van Fourier-sora.
- Teljesen hasonlóan a nem periodikus függvényekre is felbontás írható.




- **A legtöbb információt a rendszer súlyfüggvénye szolgáltatja.**

# Tartalom

- Tipikus vizsgálójelek és azok információtartalma
- Laplace transzformáció, állapotegyenlet, átviteli függvény
- Alaptagok leírása
- Alaptagok kapcsolása

# Laplace transzformáció, állapotegyenlet, átviteli függvény

- Modellek osztályozása
- Laplace transzformáció. Állapotegyenlet
- Átviteli függvény, megvalósíthatóság, pólusok, zérusok
- Lineáris rendszerek vs. nemlineáris rendszerek
- Linearizálás

# Modellek osztályozása

- Bemenet-kimenet alapú matematikai modell

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u(t)$$

- Állapotteres leírás

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Ha: ***j*** számú *u* bemenő jel

***k*** számú *y* kimenő jel

*x* állapotváltozók száma ***n***

Akkor: ***A*** **állapot mátrix** $(n \times n)$

***B*** **bemeneti mátrix** $(n \times j)$

***C*** **kimeneti mátrix** $(k \times n)$

***D*** **együttható mátrix** $(k \times j)$

# Laplace transzformáció

- Célja: differenciál egyenlet algebrai egyenletté való átalakítása (s operátor tartomány)

$$L[y(t)] = Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt$$

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st}ds$$

ahol $s = \sigma + j\omega$

- Fontos tulajdonság:

$$L\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0)$$

$$L\left[\int_0^t y(t)dt\right] = \frac{Y(s)}{s}$$

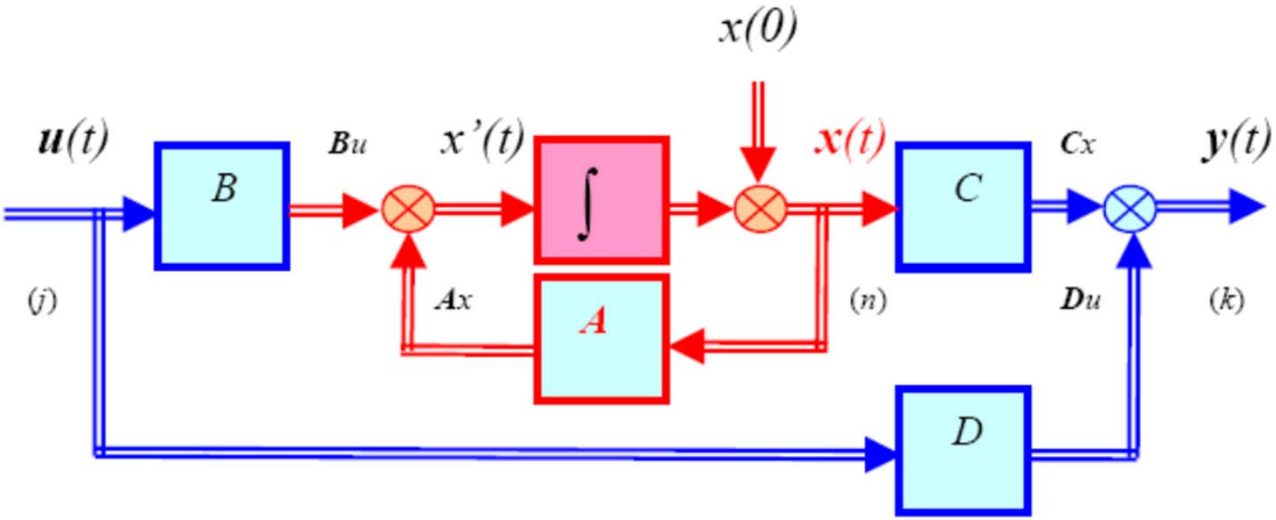
# Állapotegyenlet

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$




$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

# Átviteli függvény, megvalósíthatóság

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$ → Állapotteres leírás

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$ → Bemenet-kimenet alapú

m < n : fizikailag megvalósítható (D = 0)

m = n : fizikai megvalósítható határán van (D ≠ 0)

m > n : fizikailag nem megvalósítható

# Lineáris rendszerek vs. nemlineáris rendszerek

- A jelátvivő tagok matematikai modellje szerint:
  - Lineáris szabályozás
    - Ha a szabályozási kör minden tagjára érvényes a szuperpozíció elve
  - Nemlineáris szabályozás
    - Ha a szuperpozíció elve a szabályozási kör legalább egy tagjára nem érvényes

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \frac{dx}{dt}$$

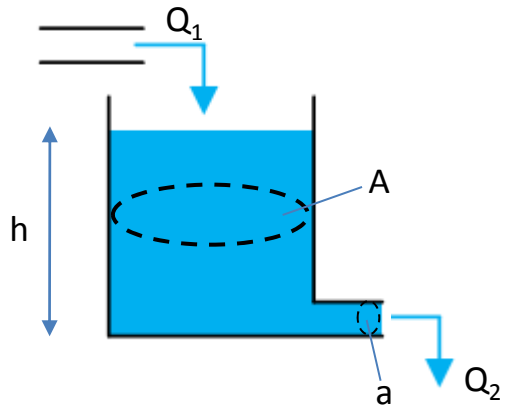
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \\ f_2(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \\ g_2(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$: az állapotváltozók függését leíró függvény
  - Általánosságban nemlineáris függvény
- $\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$: az kimenetek függését leíró függvény
  - Általánosságban nemlineáris függvény

# Lineáris rendszerek vs. nemlineáris rendszerek

- Példa nemlineáris rendszerre: víztartály
  - **$Q_1$**: a beömlő vízmennyiség [$m^3/s$]
  - **$Q_2$**: a kiömlő vízmennyiség [$m^3/s$]
  - **h**: a vízoszlop magassága [m]
  - **A**: a tartály keresztmetszete [$m^2$]
  - **a**: a kiömlő nyílás keresztmetszete [$m^2$]
  - **v**: a kiömlő víz sebessége
  - **m**: a folyadékra és a kiömlő nyílásra jellemző állandó




- A tartályból kiömlő vízmennyiség függ a víz sebességétől és a kiömlő nyílás keresztmetszetétől
- A kiömlő víz sebessége függ a tartályban lévő folyadék magasságától
- A tartályban lévő víz térfogatváltozása egyenlő a beömlő és kiömlő vízmennyiség különbségével

$$Q_2 = \mu a v$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \longrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$Q_2 = \mu a \sqrt{2g} \sqrt{h}$$

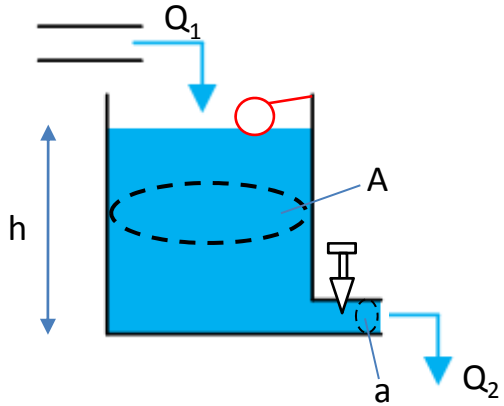
$$Q_1 - Q_2 = A \frac{dh}{dt}$$

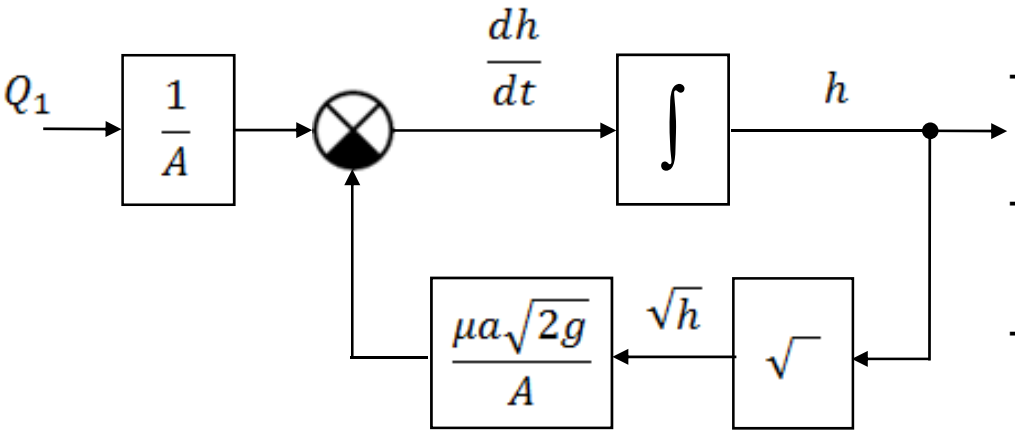
$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 - Q_2}{A} = \frac{1}{A} Q_1 - \frac{\mu a \sqrt{2g}}{A} \sqrt{h}$$

# Lineáris rendszerek vs. nemlineáris rendszerek

- Példa nemlineáris rendszerre: víztartály

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} Q_1 - \frac{\mu a \sqrt{2g}}{A} \sqrt{h}$$



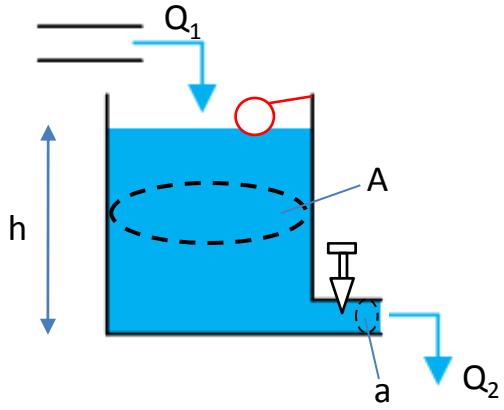




Feladat: $\mathbf{Q_1}(t) = ?$

- Bemenő jel (irányító jel): **$Q_1$** beömlő vízmennyiség
- Belső változó (állapotváltozó): **h** vízszint
  - Egyben kimeneti jel is
- Az irányítás célja: állandó **h** vízszint
  - Szintmérővel mérjük
- Zavaró jel a változó vízfogyasztás
  - Egy csappal változtathatjuk **a** értékét

# Lineáris rendszerek vs. nemlineáris rendszerek

- Példa nemlineáris rendszerre: víztartály




$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}Q_1 - \frac{\mu a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h} \qquad \begin{array}{l} x \longleftarrow h \\ u \longleftarrow Q_1 \end{array}$$

$$\dot{x} = f(x,u)$$

$$y = g(x,u)$$

---

$$\dot{x} = -\frac{\mu a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{x} + \frac{1}{A}u$$

$$y = x$$

# Linearizálás

## Taylor-sorba fejtés

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), u_1(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), u_2(t))$$

víztartály példa: $f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \Delta x$

$$\sqrt{h} \approx \sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h$$

Ha P munkapont környezetében → **munkaponti linearizálás**

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 0$$

Ekkor:

$$\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} \cong \left.\frac{\partial f_1(x_1, x_2, u_1)}{\partial x_1}\right|_P \Delta x_1(t) + \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial x_2}\right|_P \Delta x_2(t) + \left.\frac{\partial f_1(x_1, x_2, u_1)}{\partial u_1}\right|_P \Delta u_1(t)$$

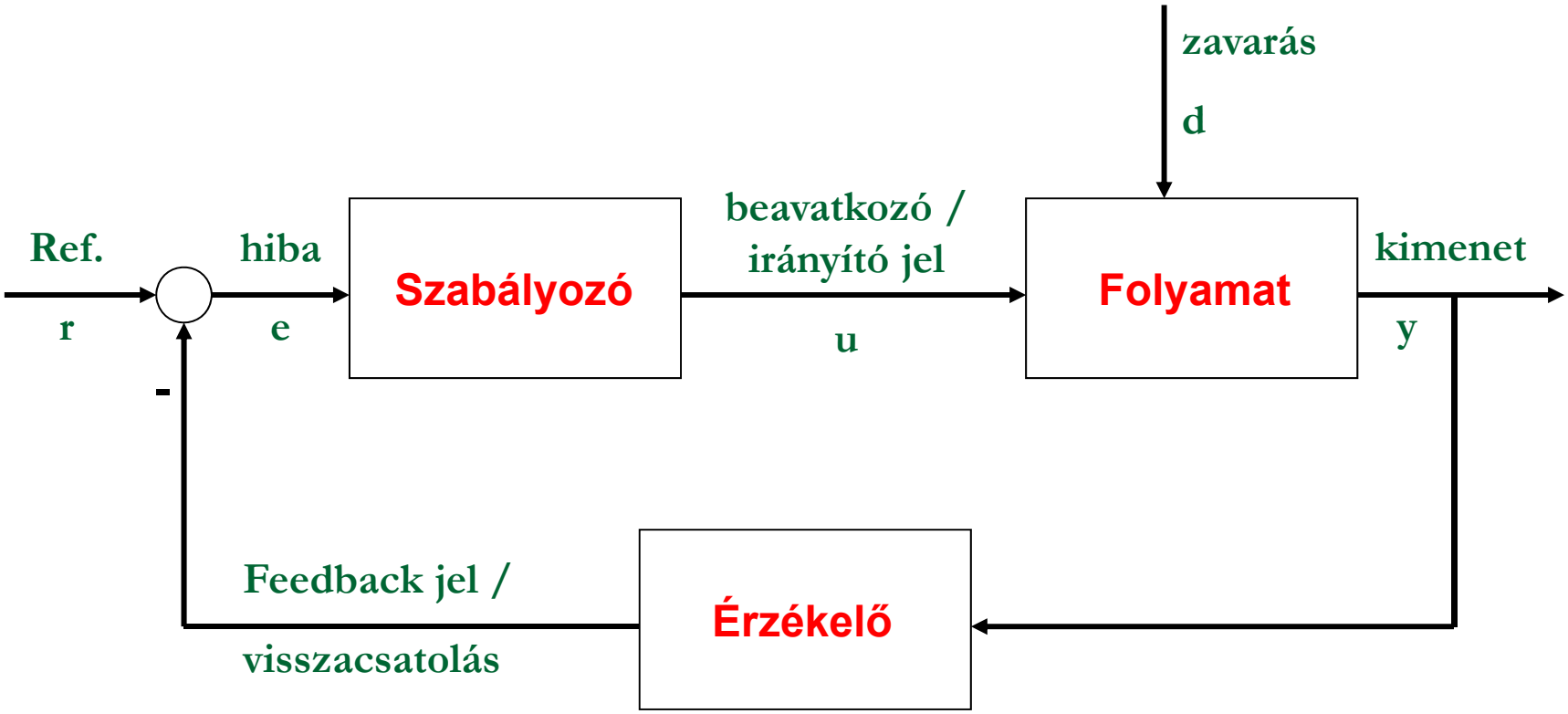
$$\frac{d\Delta x_2(t)}{dt} \cong \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial x_1}\right|_P \Delta x_1(t) + \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial x_2}\right|_P \Delta x_2(t) + \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial u_2}\right|_P \Delta u_2(t)$$

# Összefoglalás
# Rendszeranalízis alapvető feladatai

- Fizikai / modellezni kívánt folyamat megismerése
- Bemenetek, kimenetek, állapotok szeparálása
- Lineáris vs. Nemlin. Rendszer
- Blokkdiagram alkotása
  - Nyílt rendszer
  - Zárt rendszer
- Átviteli függvény felírása

# Tartalom

- Tipikus vizsgálójelek és azok információtartalma
- Laplace transzformáció, állapotegyenlet, átviteli függvény
- Alaptagok leírása
- Alaptagok kapcsolása


zavarás
d
Ref.
r
hiba
e
Szabályozó
beavatkozó /
irányító jel
u
Folyamat
kimenet
y
-
Feedback jel /
visszacsatolás
Érzékelő

# Alapvető szabályozási követelmények

Klasszikus szabályozások:

**stabilitás & minőség** ← bizonytalanságok

Jó jelkövetés

zavarelhárítás

↓

**u irányító jel szándékolt módosítása**

# Tagok leírásának lehetőségei

u(t): bemenet időfüggvénye
y(t): kimenet időfüggvénye
U(s): bemenet Laplace-transzformáltja
Y(s): kimenet Laplace-transzformáltja

- Átviteli függvény
- Állapotteres leírás
- Zérus-Pólus-Erősítés

# Átviteli függvény (transfer function)

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{m-1} + b_1 s^{m-2} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}, \qquad n \geq m$$

- a számláló gyökei: a tag zérusai
- a nevező gyökei: a tag pólusai

Az átviteli függvény az

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n.-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m-1)} + b_1 u^m + \ldots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u$$

lineáris differenciálegyenlet Laplace-transzformáltja, ha a kezdeti feltételek nullák:

$$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \ldots = \dot{y}(0) = y(0) = 0\,.$$

# Állapotteres leírás (state-space)

Egy tagot állapotegyenletével is jellemezhetünk

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- az állapotteres leírás „gazdagabb”, mint az átviteli függvénnyel történő leírás (nem irányítható és nem megfigyelhető alrendszereket is tartalmazza)

Kezdeti állapot: $x(0) = 0$

Az állapotegyenlet Lapalace-transzformáltja:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$
$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]U(s)$$
$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

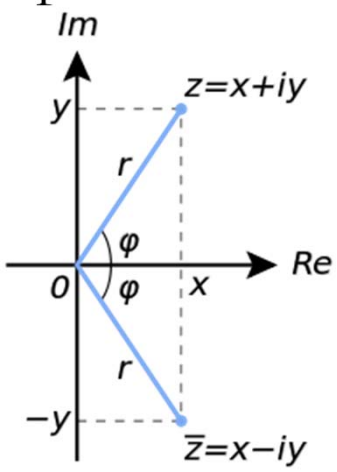
Karakterisztikus polinom $\Delta(s) = \det(sI - A)$

# Zérus-Pólus-Erősítés (Zero- Pole-Gain)

Az átviteli függvényt gyöktényezős alakra hozva:

$$W(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{m-1} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)}$$

- a gyökök valós számok vagy komplex konjugált párok lehetnek



# Tagok leírása MATLAB-ban

A Matlab Control Systems Toolbox segítségével a lineáris tagok mindhárom alakban vizsgálhatóak.

- átviteli függvény: transfer function (`tf`),
- állapotegyenlet: state-space (`ss`),
- gyöktényezs alak: zero-pole-gain (`zpk`)

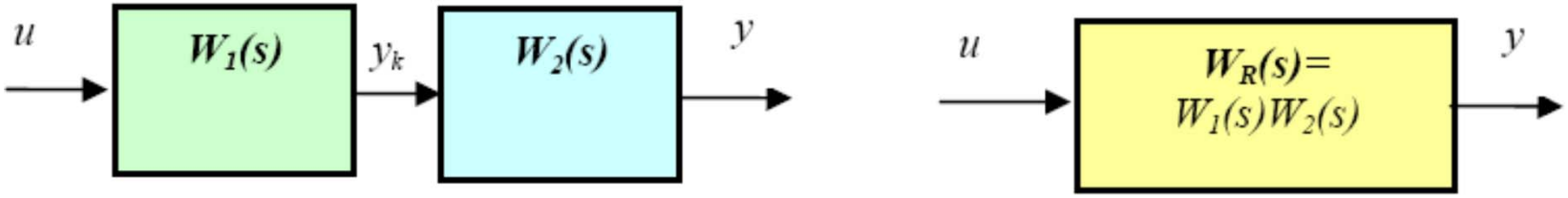
| Időtartomány típusa | Reprezentáció | Tárolt struktúra mezői |
|---|---|---|
| Folytonos | Átviteli függvény | `num` – számláló(k) cellatömbje<br>`den` – nevező(k) cellatömbje |
| Folytonos | Zérus – Pólus – Erősítés | `z` – zérusok cellatömbje<br>`p` – pólusok cellatömbje<br>`k` – erősítés (MIMO[3] esetben mátrix) |
| Folytonos | Állapotegyenlet | `a` – állapotmátrix<br>`b` – bemeneti mátrix<br>`c` – kimeneti mátrix<br>`d` – közvetlen erősítés |

- `ss2tf()`, `tf2ss()`, `ss2zp()`, `zp2ss()`, `zp2tf()`, `tf2zp()` – áttérések
- `conv()` – polinom szorzás

# Tartalom

- Tipikus vizsgálójelek és azok információtartalma
- Laplace transzformáció, állapotegyenlet, átviteli függvény
- Alaptagok leírása
- Alaptagok kapcsolása

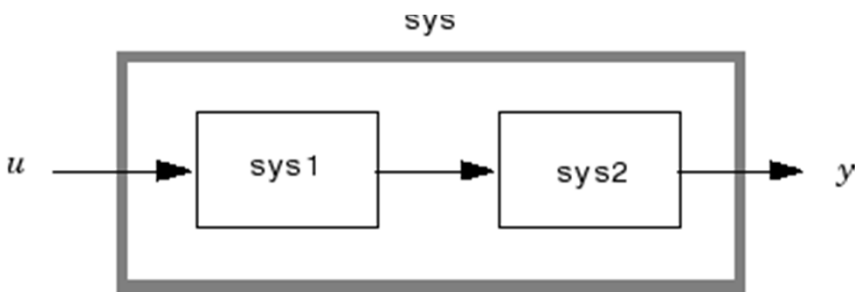
# Soros kapcsolás




**Sorosan** kapcsolt tagok

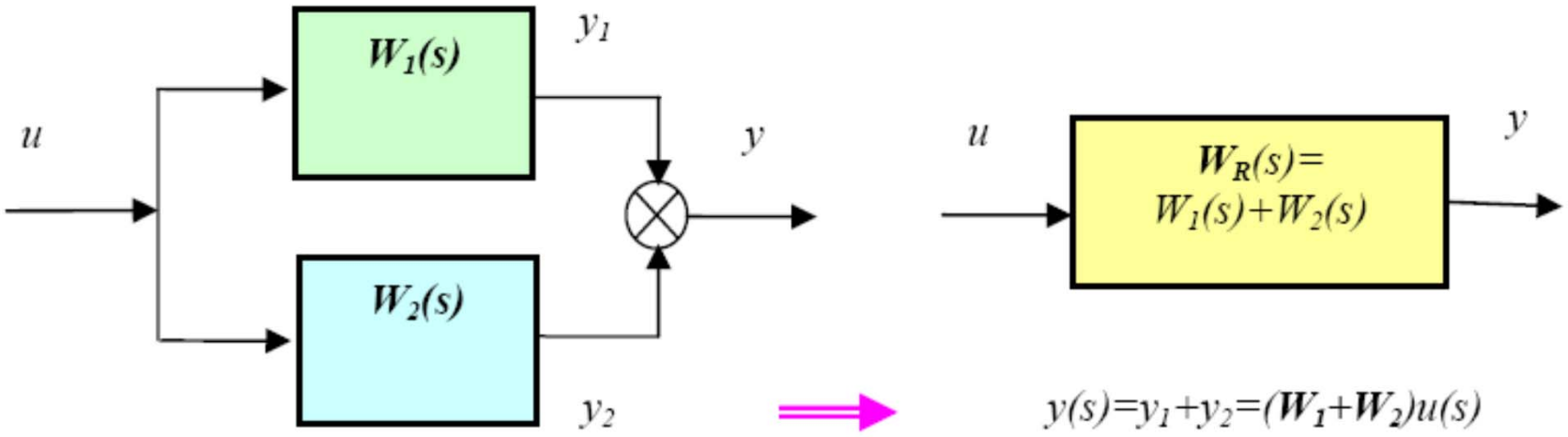
$y(s)=W_2y_k(s)=W_2W_1u(s)$

```
sys = series(sys1,sys2)
```




A parancs a tagok szorzását jelenti:
sys = sys2 * sys1

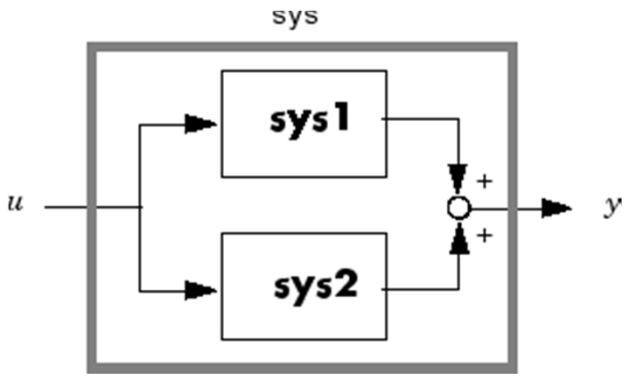
# Párhuzamos kapcsolás




$y(s)=y_1+y_2=(W_1+W_2)u(s)$

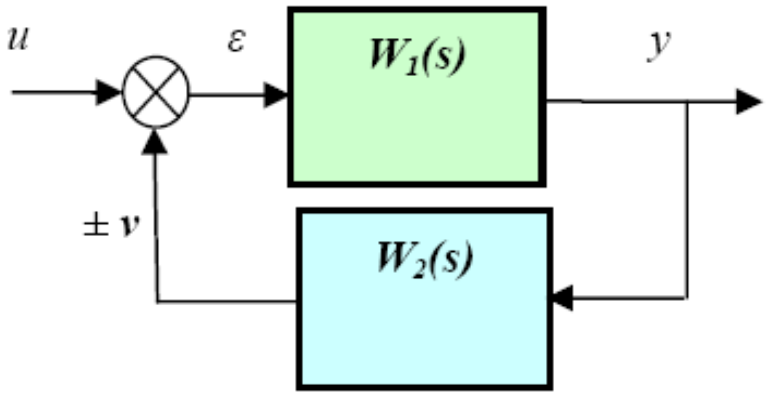
**Párhuzamosan** kapcsolt tagok

```
sys = parallel(sys1,sys2)
```

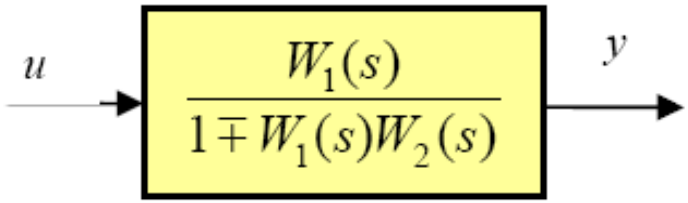



A parancs a tagok összeadását jelenti:
sys = sys1 + sys2

# Visszacsatolás




$W_1$ átviteli függvényű tag pozitív vagy negatív **visszacsatolása** a $W_2$ átviteli függvényű taggal

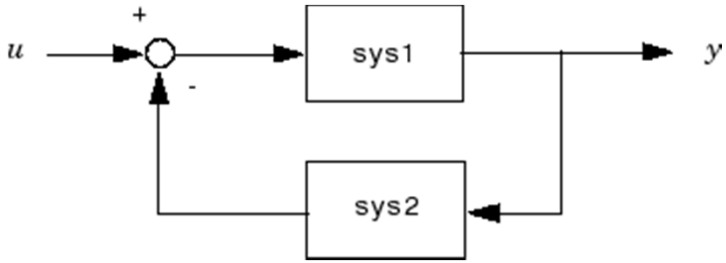



+ : **negatív** visszacsatolás
– : **pozitív** visszacsatolás

**Előre vezető ág / (1 plusz hurokerősítés)**

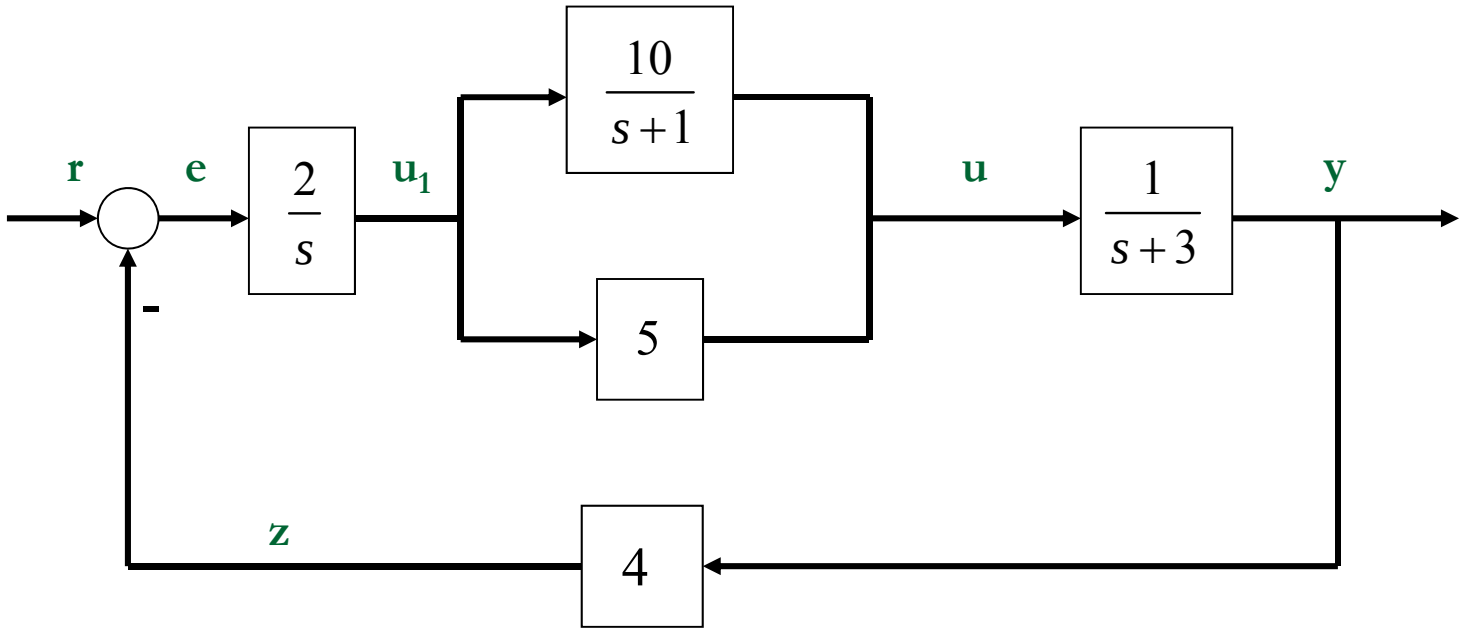
MATLAB

```
sys = feedback(sys1,sys2)
```



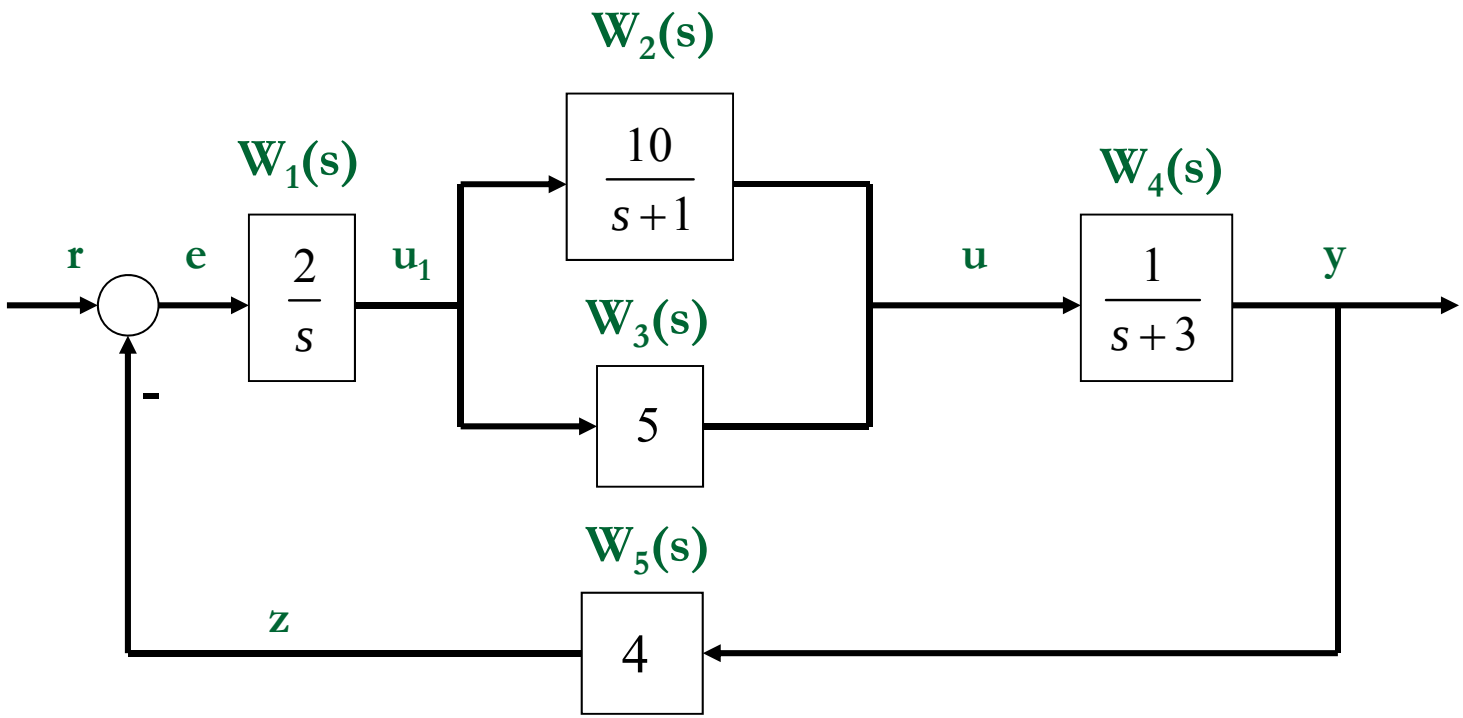

A default feedback negatív visszacsatolást jelent.
Pozitív visszacsatolás: `sys = feedback(sys1,sys2,+1)`

# Példa

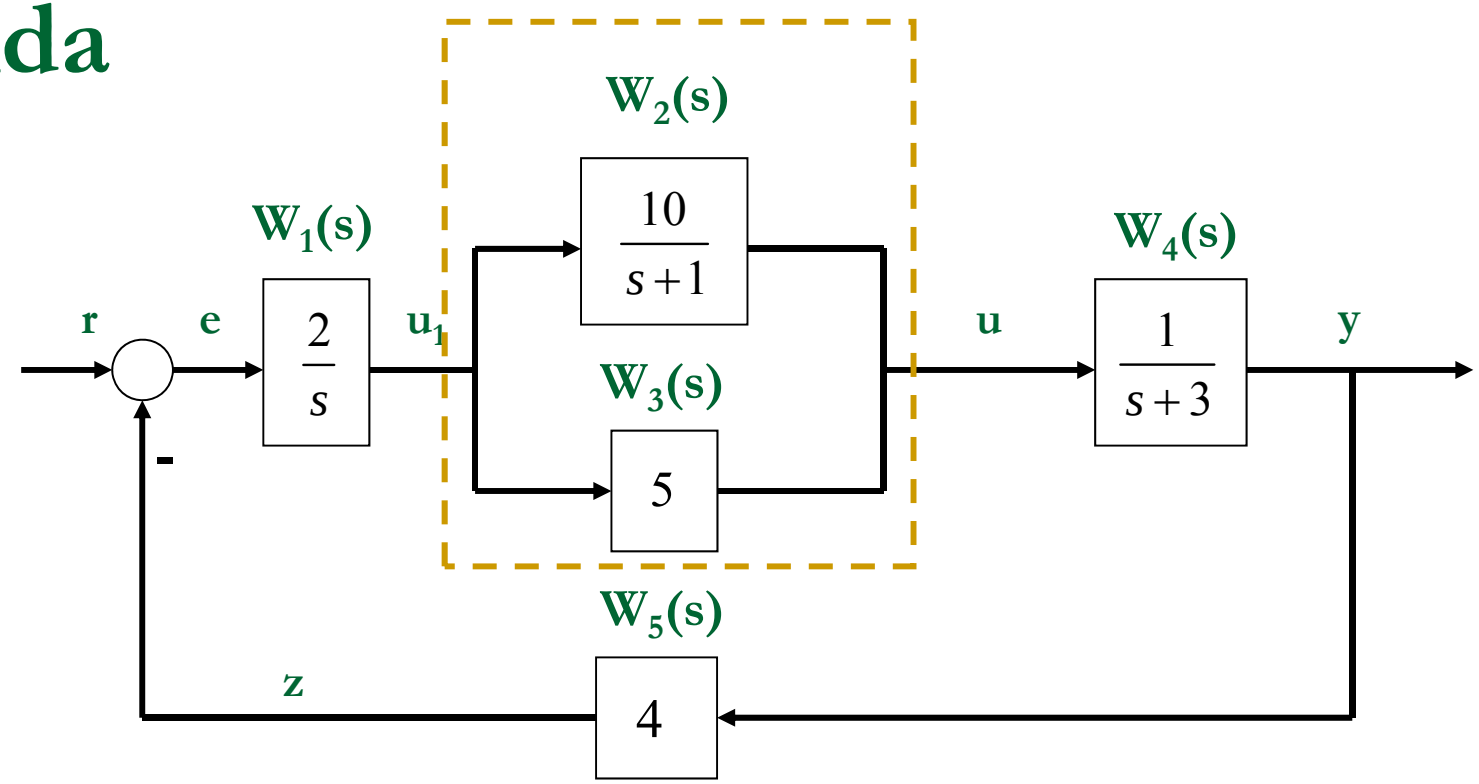



Mennyi az eredő átviteli függvény?

# Példa



# Példa

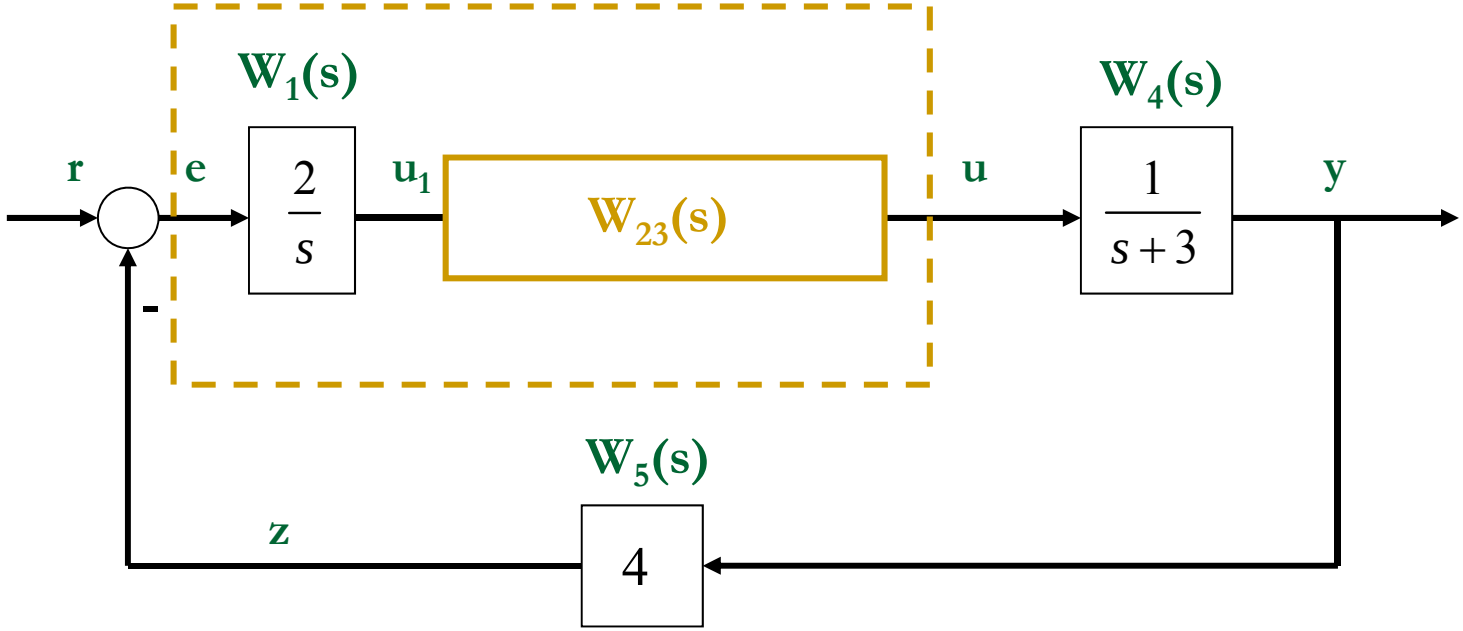



Párhuzamos kapcsolás

$$W_{23}(s) = W_2(s) + W_3(s) = \frac{10}{s+1} + 5 = \frac{5 \cdot (s+3)}{s+1}$$

```
mo2=10; no2=[1 1];
mo3=5; no3=1;
[p1,p2]=parallel(mo2,no2,mo3,no3);
```

# Példa

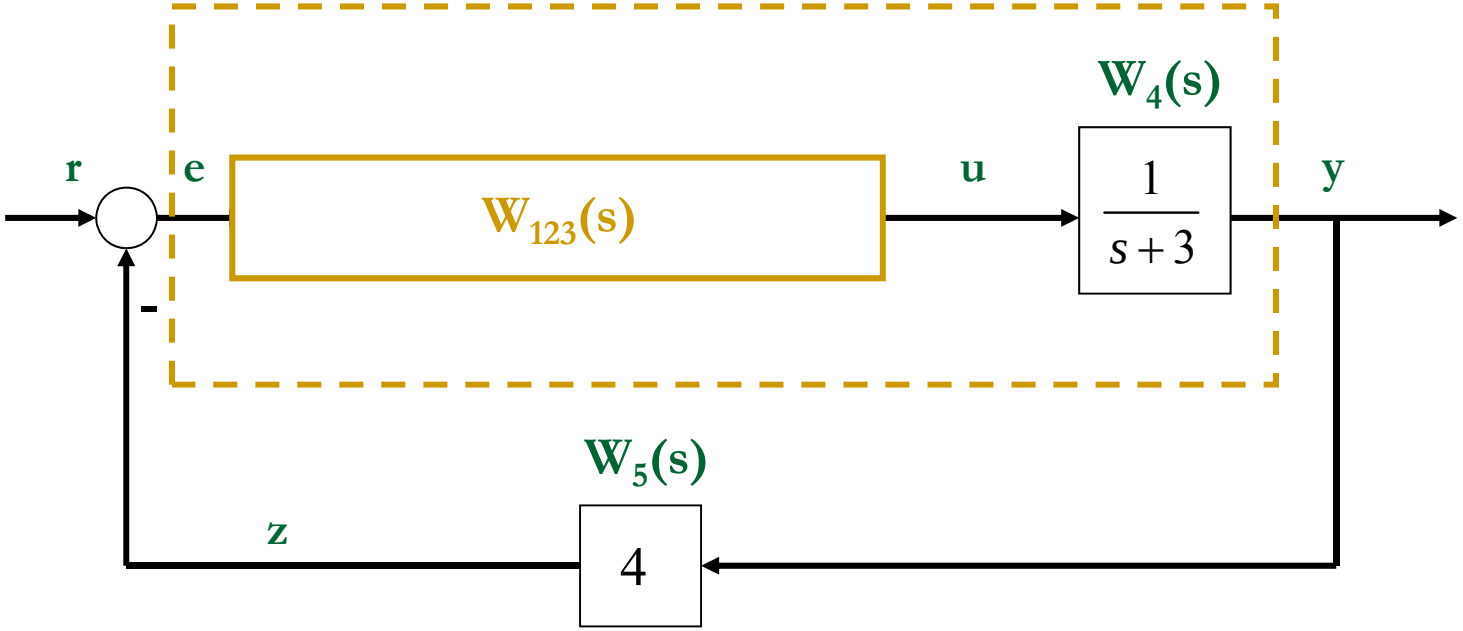



Soros kapcsolás

$$W_{123}(s) = W_1(s) \cdot W_{23}(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{5 \cdot (s+3)}{s+1} = \frac{10 \cdot (s+3)}{s \cdot (s+1)}$$

```
mo1=2; no1=[1 0];
[s1,s2]=series(p1,p2,mo1,no1);
```

# Példa



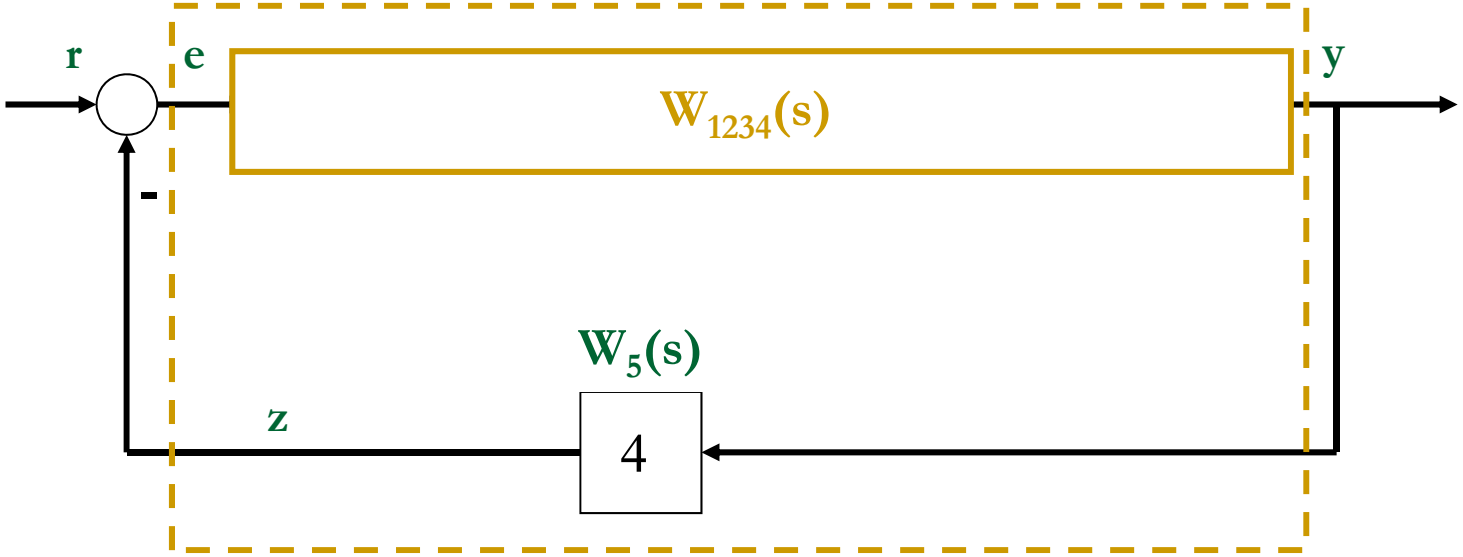

Soros kapcsolás

$$W_{1234}(s) = W_{123}(s) \cdot W_4(s) = \frac{10 \cdot (s+3)}{s \cdot (s+1)} \cdot \frac{1}{s+3} =$$

$$= \frac{10}{s \cdot (s+1)}$$

```
mo4=1; no4=[1 3];
[s3,s4]=series(s1,s2,mo4,no4);
```

# Példa



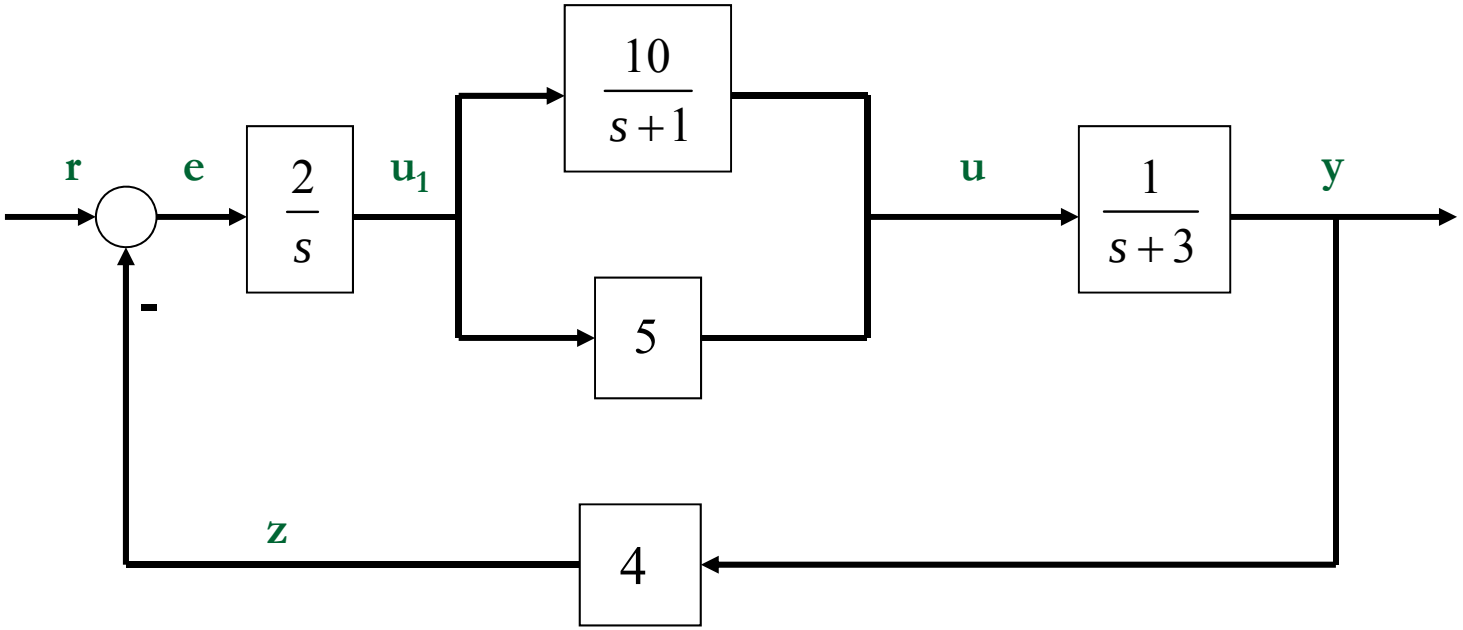

Negatív visszacsatolás

$$W_{12345}(s) = \frac{W_{1234}(s)}{1 + W_{1234}(s) \cdot W_5(s)} = \frac{\frac{10}{s \cdot (s+1)}}{1 + \frac{10}{s \cdot (s+1)} \cdot 4} =$$

$$= \frac{10}{s^2 + s + 40}$$

```
mo5=4; no5=1;
[m,n]=feedback(s3,s4,mo5,no5)
```

# Példa




$$W(s) = \frac{10}{s^2 + s + 40}$$

$$= \frac{10s + 30}{s^3 + 4s^2 + 43s + 120}$$

Eredmény:

```
m =     0     0    10    30
n =     1     4    43   120
```

# Köszönöm a figyelmet!

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu