Óbudai EGYETEM
Universitas Budensis

Neumann János INFORMATIKAI KAR

Irányítástechnika
3. előadás

Dr. Kovács Levente

2013. 04. 16.

Tartalom

- Laplace transzformáció, fontosabb jelek Laplace transzformáltja
- Stabilitás alaptétele
- Bode diagram, Bode-féle stabilitás kritérium
- Nyquist diagram, Nyquist-féle stabilitás kritérium

Tartalom

- Laplace transzformáció, fontosabb jelek Laplace transzformáltja
- Stabilitás alaptétele
- Bode diagram, Bode-féle stabilitás kritérium
- Nyquist diagram, Nyquist-féle stabilitás kritérium

Laplace transzformáció (ismétlés)

- Célja: differenciál egyenlet algebrai egyenletté való átalakítása (s operátor tartomány)

$$L[y(t)] = Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt$$

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st}ds$$

ahol $s = \sigma + j\omega$

- Fontos tulajdonság:

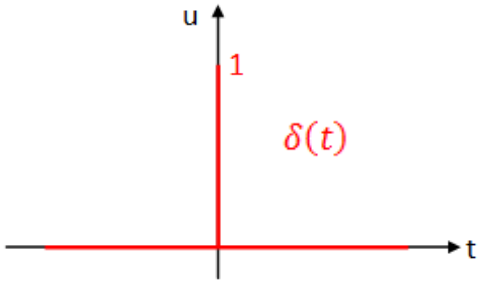
$$L\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0)$$

$$L\left[\int_0^t y(t)dt\right] = \frac{Y(s)}{s}$$

Fontosabb jelek Laplace transzformáltja

- Egységimpulzus (Dirac-delta)

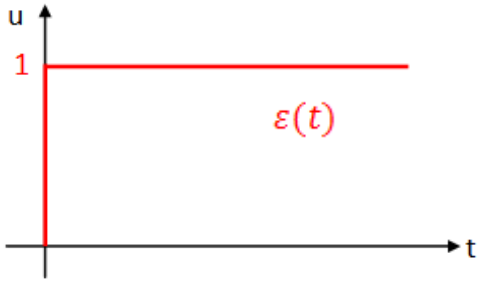
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$



egységimpulzus

- Egységugrás

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$



egységugrás

- Deriválás

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

- Integrálás

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Fontosabb jelek Laplace transzformáltja

- Nevezetes függvények

$$\mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}$$

$$\mathcal{L}\{1 - e^{-t/T}\} = \frac{1}{s(1 + sT)}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Fontosabb jelek Laplace transzformáltja

- Konvolúciós tétel

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = F_1(s) F_2(s)$$

- Határérték tételek

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Jelek Laplace transzformáltja (összefoglaló táblázat)

Időfüggvény	Laplace-transzformált
$F(t) \quad t > 0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t\text{-}\tau)$	$e^{-s\tau}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$1(t\text{-}\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-s\tau}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{a+s}$
$\frac{1}{T}e^{-t/T}$	$\frac{1}{1+Ts}$
$1-e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$

Jelek Laplace transzformáltja (összefoglaló táblázat)

Időfüggvény	Laplace-transzformált
$\frac{1}{T^2} t e^{-t/T}$	$\frac{1}{(1+Ts)^2}$
$\frac{1}{T_1 - T_2}\left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right)$	$\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
$-\frac{1}{T}\mathrm{sh}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{1-T^2 s^2}$
$\frac{1}{T^3}(T-t)e^{-t/T}$	$\frac{s}{(1+Ts)^2}$
$T\left(e^{-t/T} + \frac{t}{T} - 1\right)$	$\frac{1}{s^2(1+Ts)}$
$1 - \frac{T+t}{t} e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$

Tartalom

- Laplace transzformáció, fontosabb jelek Laplace transzformáltja
- Stabilitás alaptétele
- Bode diagram, Bode-féle stabilitás kritérium
- Nyquist diagram, Nyquist-féle stabilitás kritérium

Stabilitás alaptétele

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

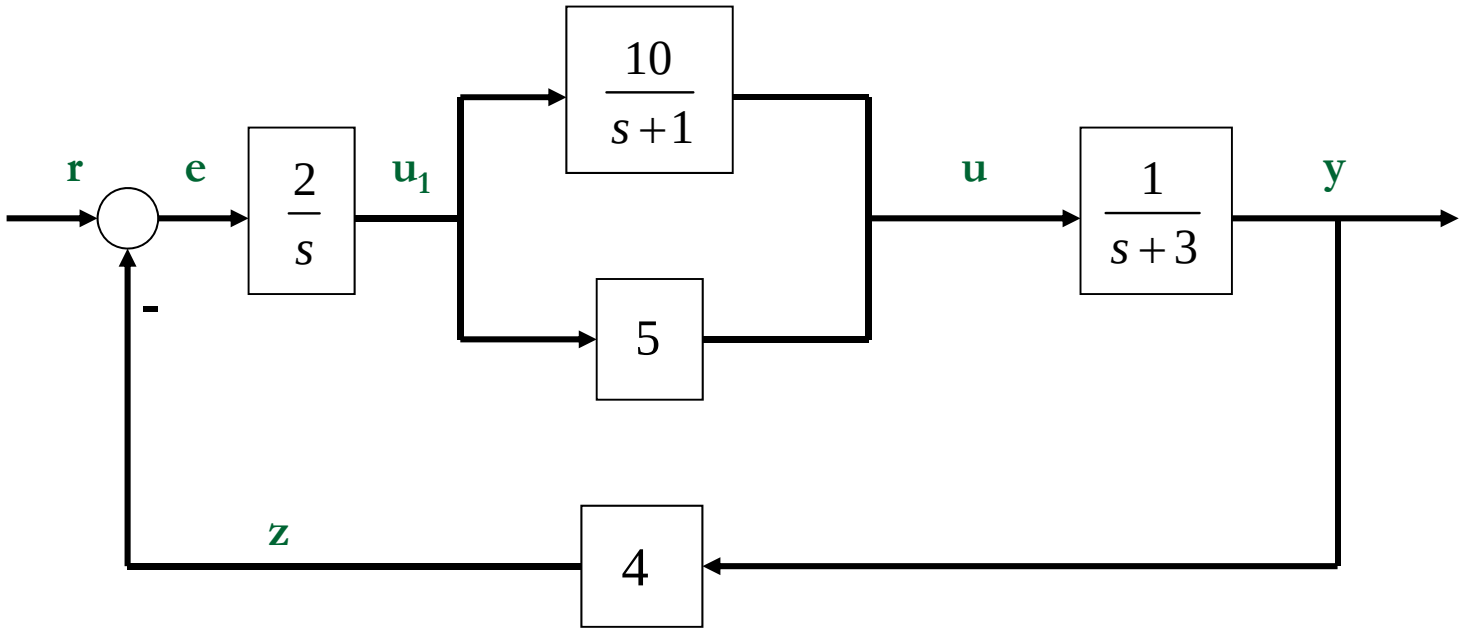
Karakterisztikus polinom

p_i gyökök (i=1…n) = a zárt rendszer pólusai

A zárt rendszer z_i zérusai (i=1…m): $b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0 = 0$

Stabilitás általános feltétele: $\mathrm{Re}\{p_i\}<0$

Példa



$$W(s) = \frac{10}{s^2 + s + 40}$$

Z = -3
P = -0.5000 + 6.3048i
-0.5000 - 6.3048i
-3.0000

Frekvencia tartomány

- Célja: rendszer átfogóbb elemzése, stabilitás
- Áttérés: $s = j\omega$
- Átviteli függvény egy komplex szám:

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}\{W(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{W(j\omega)\}$$

$$\Downarrow$$

$$W(j\omega) = |W(j\omega)|\, e^{j \arg\{W(j\omega)\}}$$

$$|W\{j\omega\}| = \sqrt{[\mathrm{Re}\,W\{j\omega\}]^2 + [\mathrm{Im}\,W\{j\omega\}]^2}$$

$$\arg W\{j\omega\} = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,W\{j\omega\}}{\mathrm{Re}\,W\{j\omega\}}$$

Stabilitási módszerek – frekv. tart.

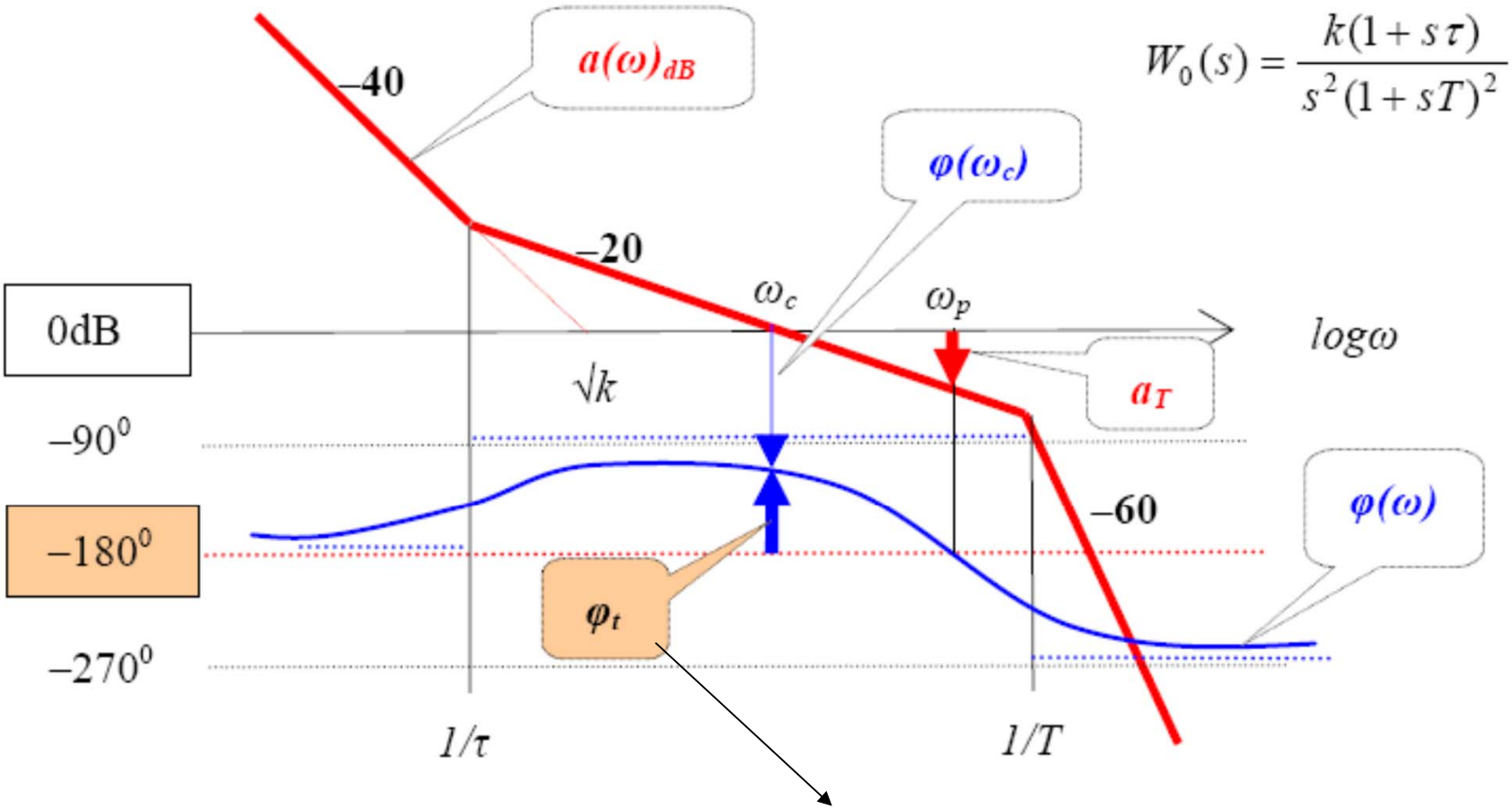
- 2 módszer:
  - Bode-féle stabilitás kritérium
  - Nyquist-féle stabilitás kritérium

Tartalom

- Laplace transzformáció, fontosabb jelek Laplace transzformáltja
- Stabilitás alaptétele
- Bode diagram, Bode-féle stabilitás kritérium
- Nyquist diagram, Nyquist-féle stabilitás kritérium

Bode diagramm

- Lineáris frekvencia reprezentáció
- Logaritmikus skála: dekád
- Mértékegység: decibel (dB)
- Amplitúdó és fázisdiagramm
  - $|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$
- MATLAB: bode(num, den)



fázistöbblet = $\pi + \arg W_0\{j\omega\}$

Pólus és zérus hatások

$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^i} \frac{\prod_{l=1}^{c_1}(1 + j\omega\tau_l)}{\prod_{l=1}^{e_1}(1 + j\omega T_l)} e^{-\omega T_h}$$

+20 dB/dec

$+\pi/2$

-20 dB/dec

$-\pi/2$

$$a(\omega)_{dB} = 20 \log a(\omega) = 20[\log k + \sum_{l=1}^{c_1} \log \sqrt{1 + (\omega\tau_l)^2} - i \log \omega - \sum_{l=1}^{e_1} \log \sqrt{1 + (\omega T_l)^2}$$

$$\varphi(\omega) = arcW(j\omega) = \sum_{l=1}^{c_1} arctg(\omega\tau_l) - i\frac{\pi}{2} - \sum_{l=1}^{e_1} arctg(\omega T_l) - \omega T_h$$

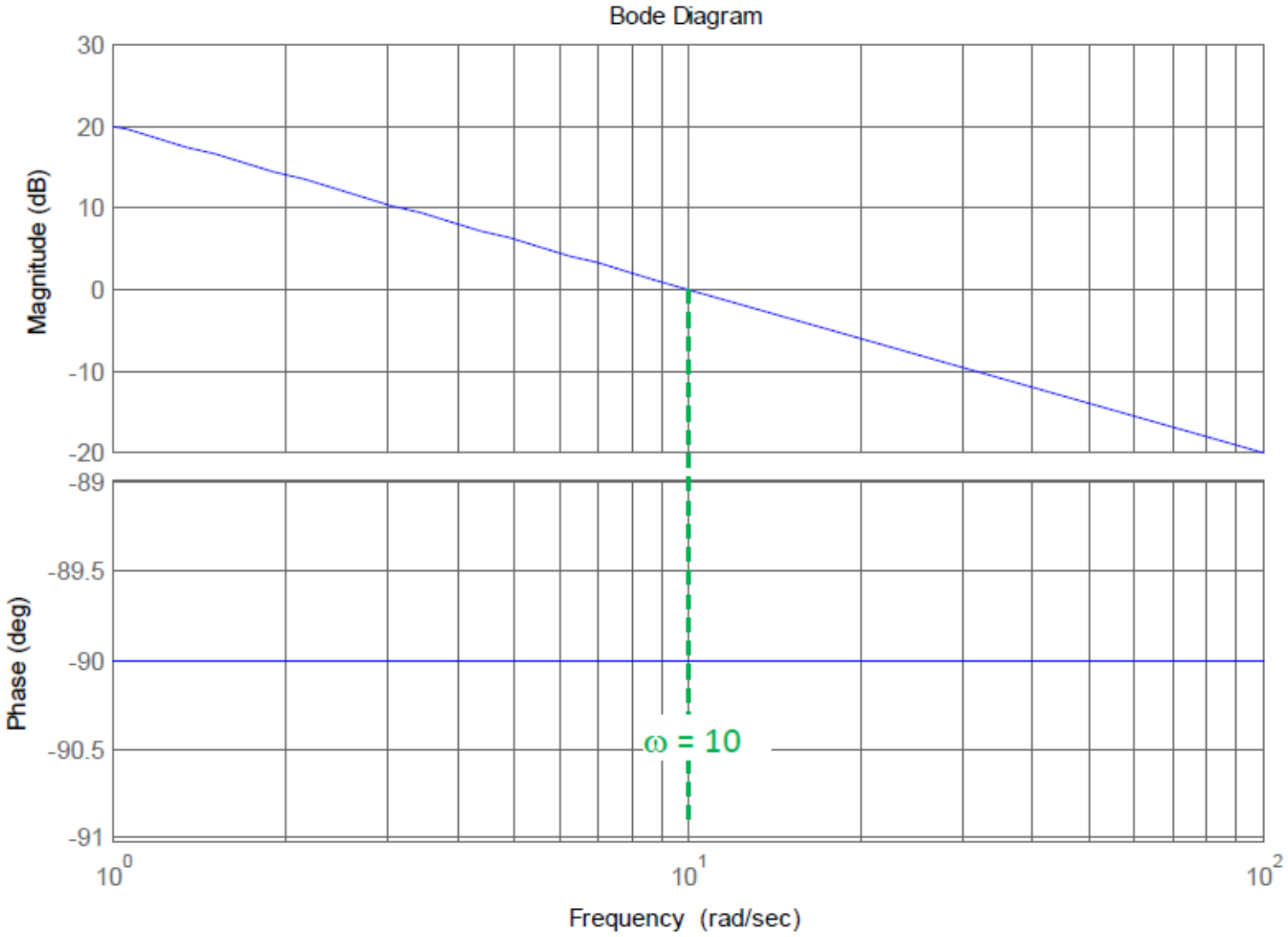
Bode-féle stabilitási kritérium

- Nyitott körre ábrázolunk, $W_0(j\omega)$
- Ha $W_0(j\omega)$ Bode diagrammjának φ_t fázistöbblete
  - A zárt rendszer stabilis, ha $\varphi_t > 0$;
  - A zárt rendszer stabilitás határán van, ha $\varphi_t = 0$;
  - A zárt rendszer labilis, ha $\varphi_t < 0$;

- Megj.: $\varphi_t \in [45, 60]^o$ biztos működés (gyakorlati tapasztalat).

Bode diagram (példa 1)

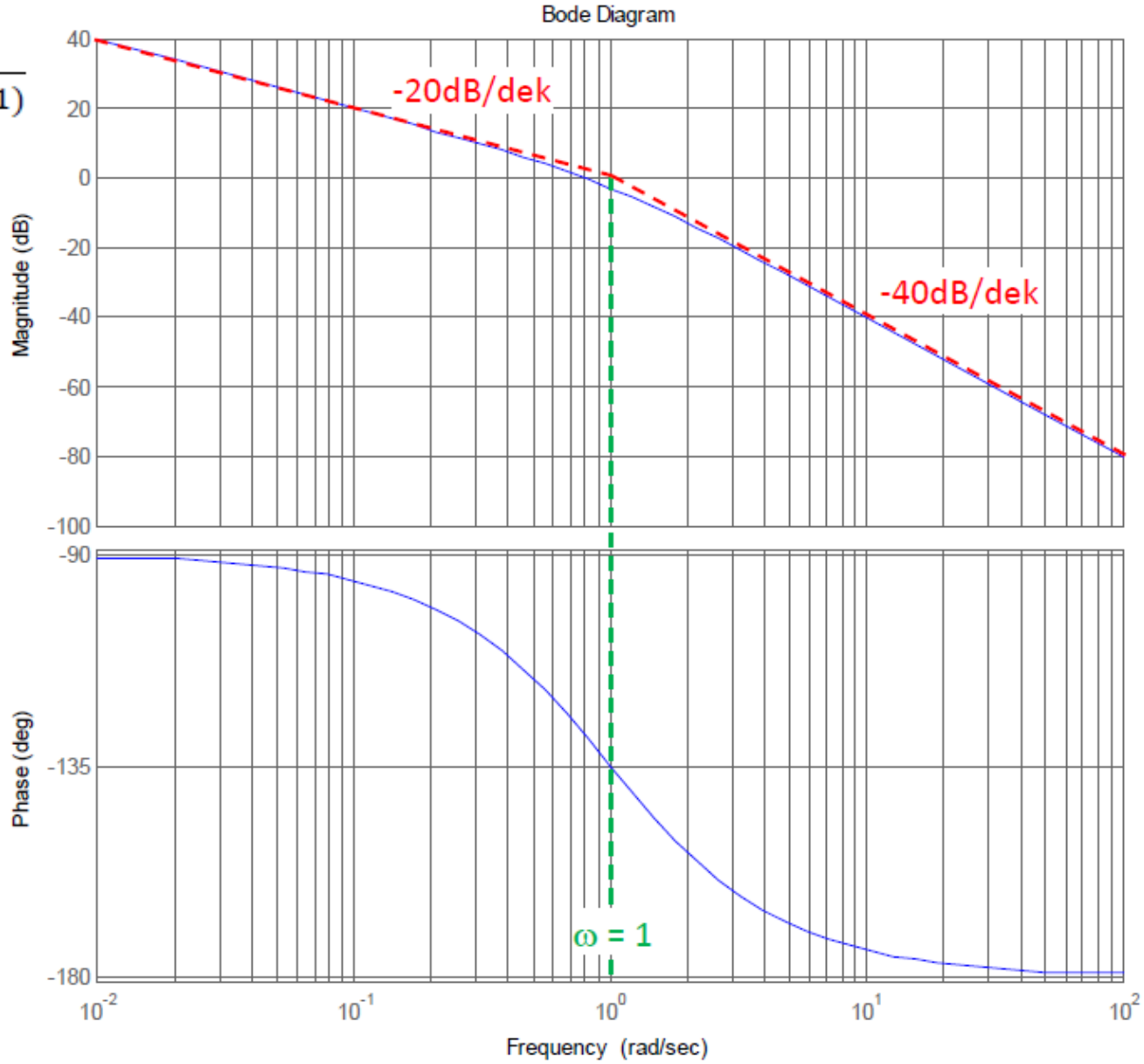
$$w(s) = \frac{10}{s} = \frac{1}{Ts} = \frac{1}{0{,}1s} \qquad T = 0{,}1 \;\rightarrow\; \omega = 10$$



Bode diagram (példa 2)

$$w(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{sT_1} \cdot \frac{1}{(sT_2+1)}$$

$$T_1 = T_2 = 1$$



Bode diagram (példa 3)

Amplitúdó menet töréspontos közelítése

$$w_0(s) = \frac{20000}{(s^2 + 101s + 100)(s + 20)}$$

időállandós alak:

$$w_0(s) = \frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)} = \frac{20}{20} \cdot \frac{100}{100} \frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)}$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{20000}{(s+1)(0{,}05s+1)(0{,}01s+1)} = \frac{10}{(s+1)(0{,}05s+1)(0{,}01s+1)}$$

s = jω = 0 helyettesítéssel:

$$w_0(0) = 10 \quad \longrightarrow \quad a_{[dB]}(0) = 20lg10 = 20dB$$

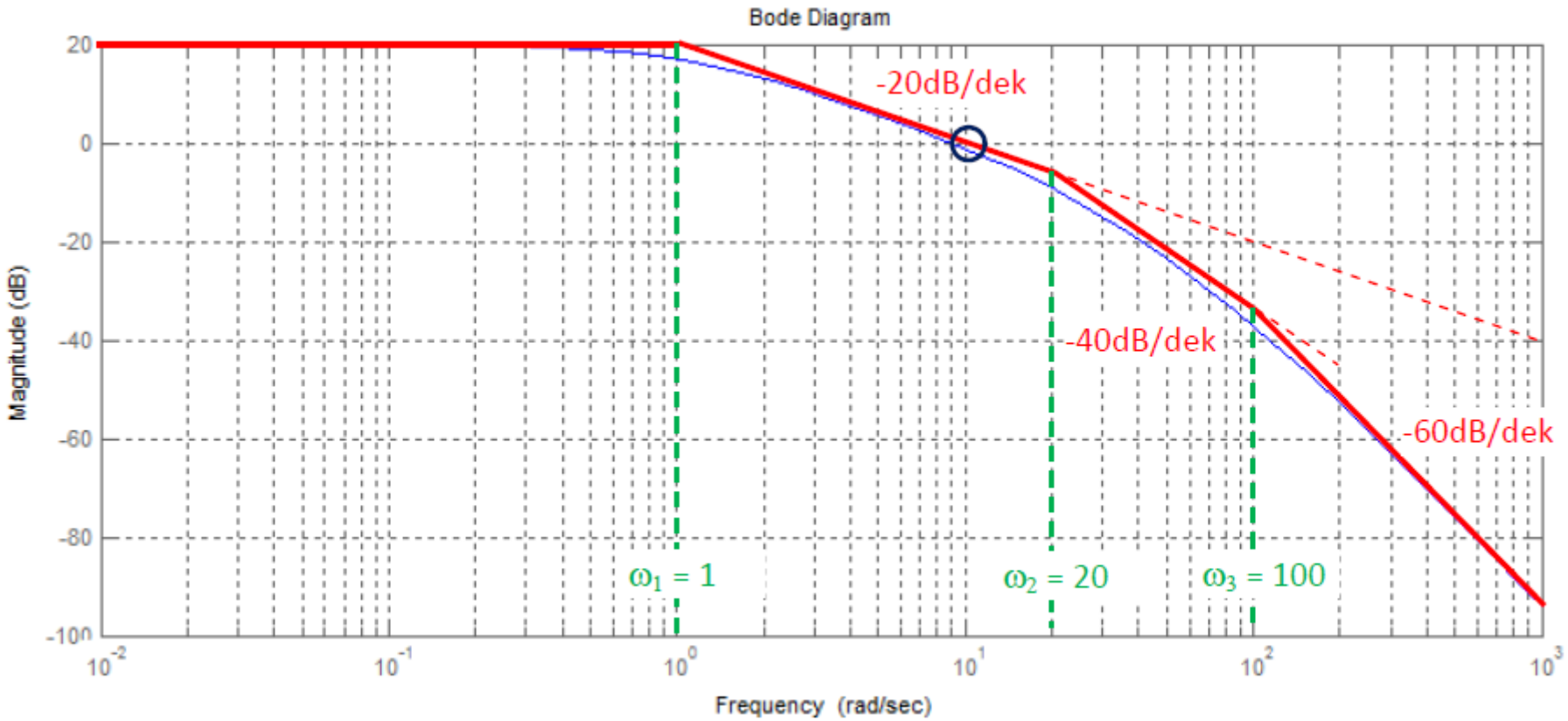
a három törésponti frekvencia:

ω_1 = 1 rad/sec $\qquad$ ω_2 = 20 rad/sec $\qquad$ ω_3 = 100 rad/sec

Bode diagram (példa 3)

Amplitúdó menet töréspontos közelítése

- 0-tól ω_1–ig 20dB-es erősítés
- ω_1–től ω_2–ig -20dB/dekádos meredekségű szakasz
- ω_2–től ω_3–ig -40dB/dekádos meredekségű szakasz
- ω_3–tól -60dB/dekádos meredekségű

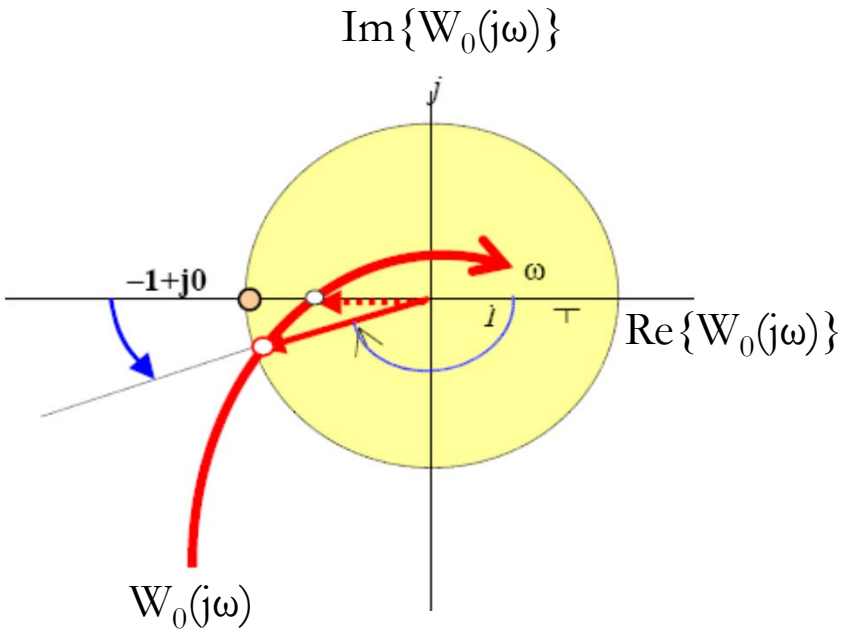


Tartalom

- Laplace transzformáció, fontosabb jelek Laplace transzformáltja
- Stabilitás alaptétele
- Bode diagram, Bode-féle stabilitás kritérium
- Nyquist diagram, Nyquist-féle stabilitás kritérium

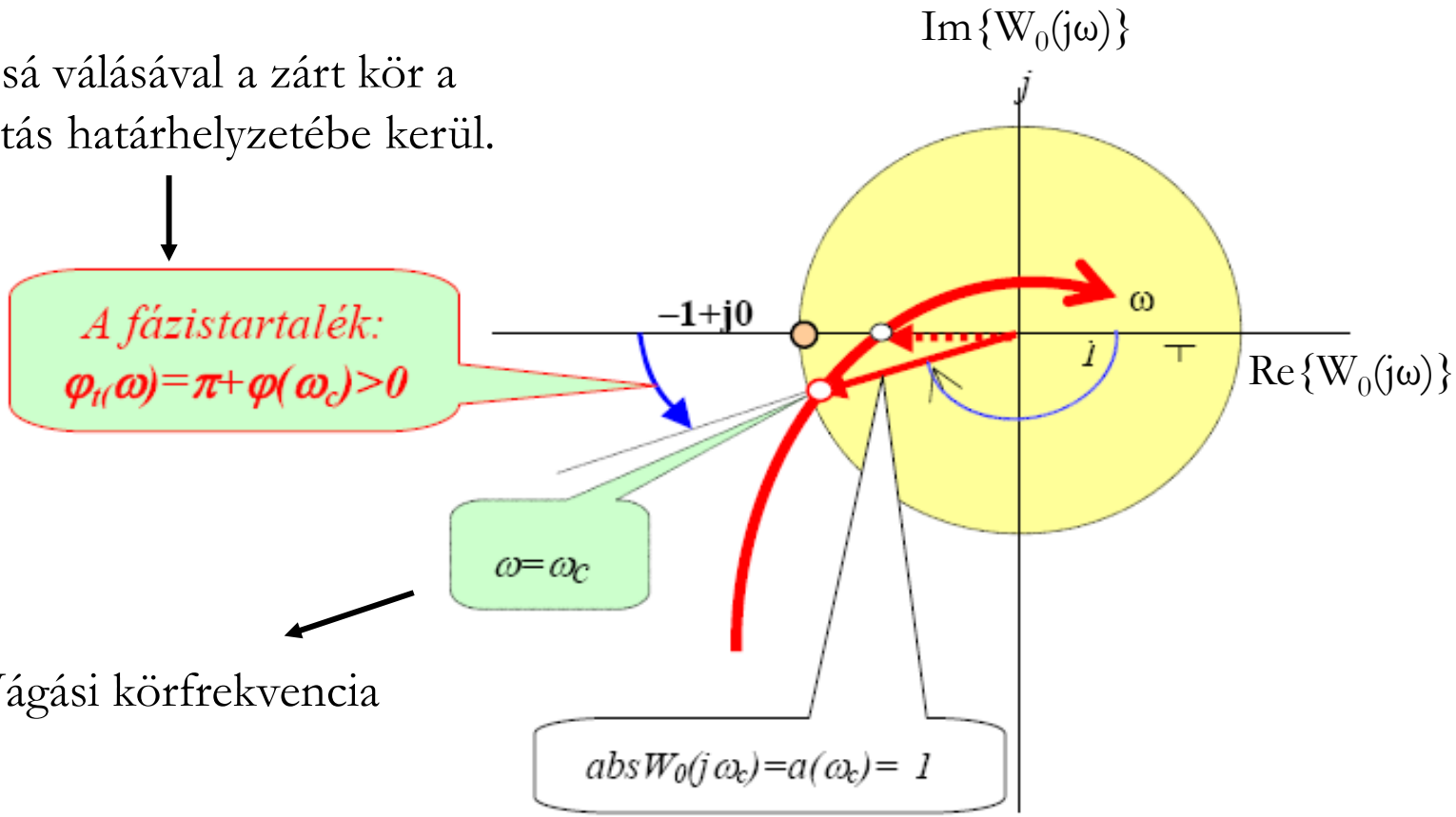
Nyquist diagramm

- Re{W(jω)} vs. Im{W(jω)} ábrázolása
- Óramutató járásával ellentétes
- Nyitott körre ábrázoljuk
- Fontos pontja a **-1+j0** pont (1+W_0(s) miatt) – ld. stabilitás



Nyquist diagramm - fázistartalék

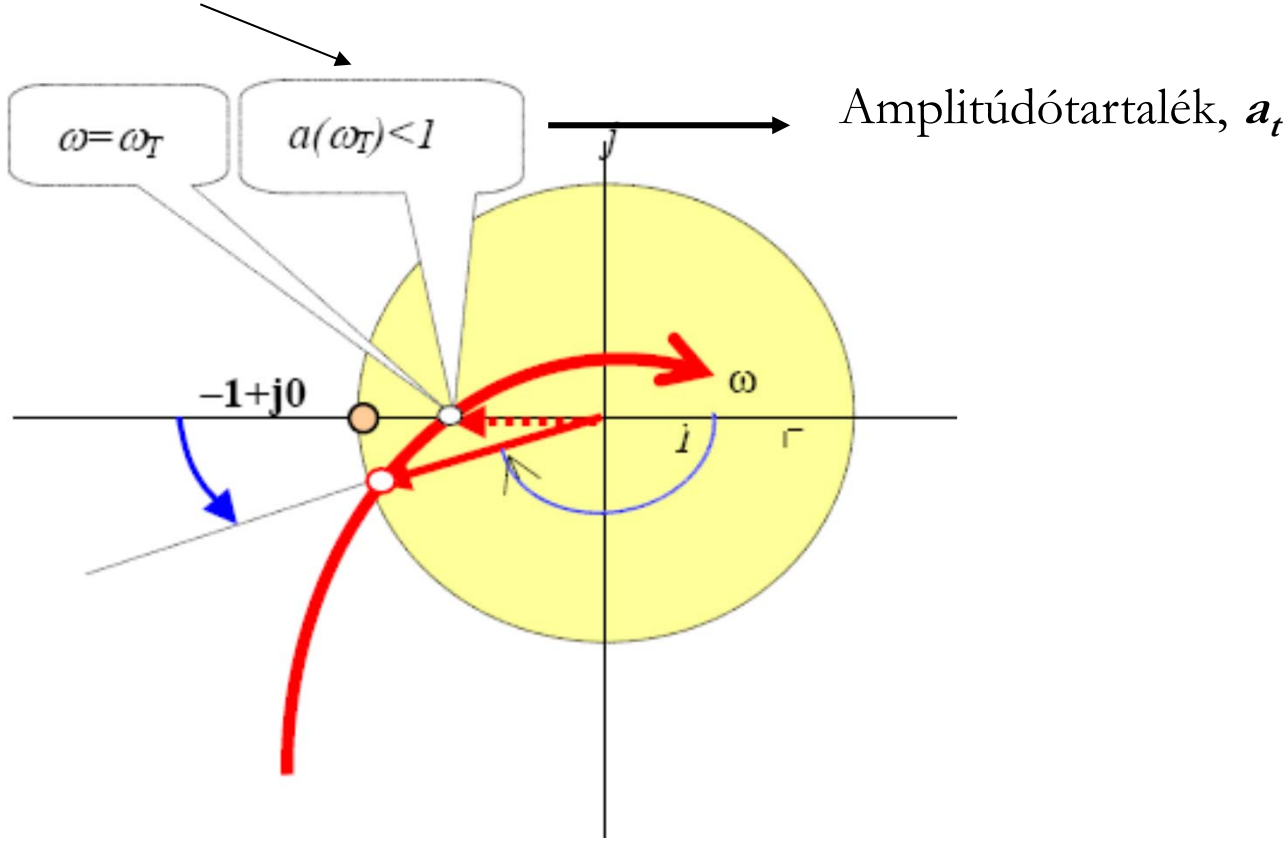
Zérussá válásával a zárt kör a stabilitás határhelyzetébe kerül.



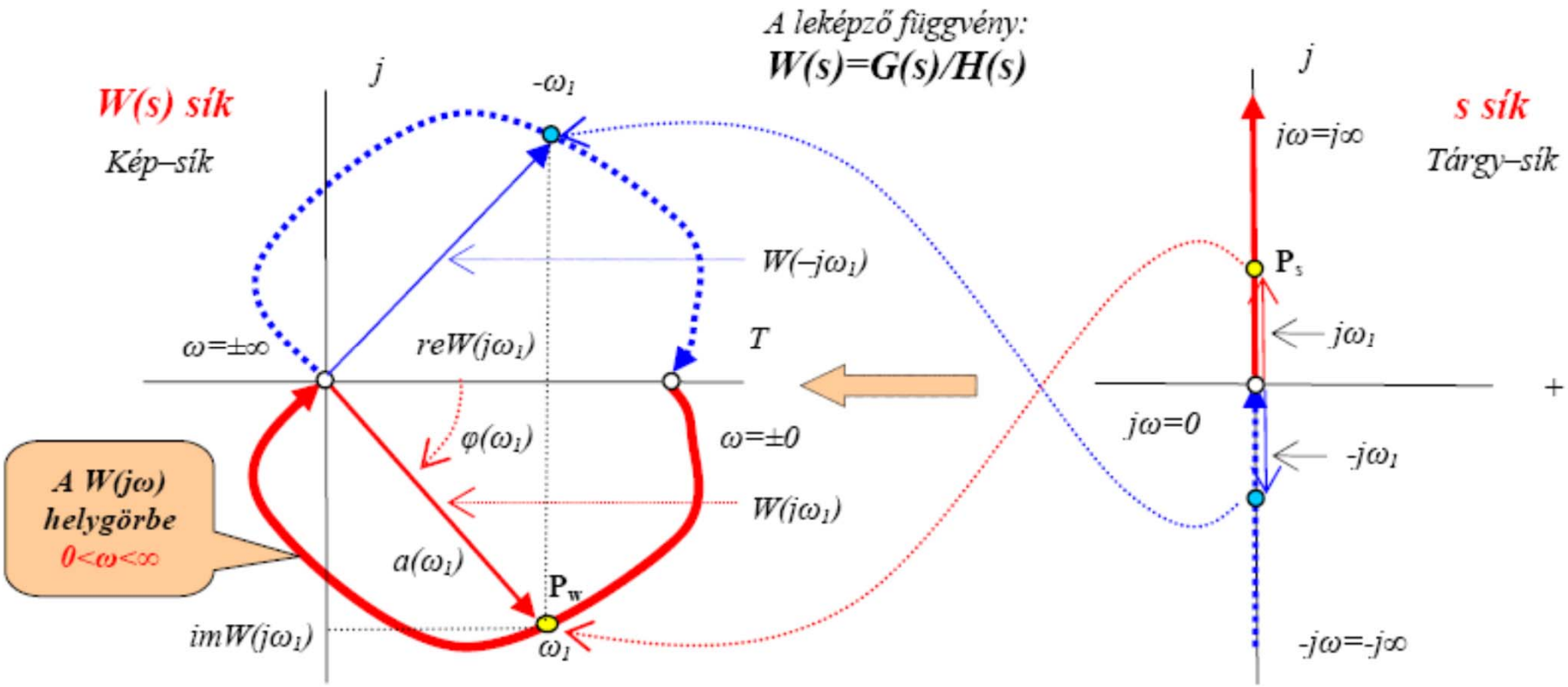
Vágási körfrekvencia

Nyquist diagramm - amplitúdótartalék

a_t az a szám amivel $a(\omega_t)$ megszorozva stabilitás határára kerül a zárt rendszer.



Összegzés


A leképző függvény:
W(s)=G(s)/H(s)
W(s) sík
Kép–sík
j
-ω1
W(–jω1)
ω=±∞
reW(jω1)
T
φ(ω1)
ω=±0
W(jω1)
a(ω1)
Pw
imW(jω1)
ω1
A W(jω) helygörbe
0<ω<∞
j
jω=j∞
s sík
Tárgy–sík
Ps
jω1
+
jω=0
-jω1
-jω=-j∞

Nyquist stabilitási kritérium

- Nyitott kört ábrázolunk, $W_0(j\omega)$
- A zárt rendszer stabilis, ha $W_0(j\omega)$ Nyquist diagrammja az óramutató járásával ellentétesen annyiszor fogja körül a -1+j0 pontot amennyi labilis (jobboldali) pólusa van $W_0(j\omega)$ –nak.
- A zárt rendszer stabilis, ha $W_0(j\omega)$ Nyquist diagrammja nem fogja körül a -1+j0 pontot.

Köszönöm a figyelmet!

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu