Óbudai EGYETEM
Universitas Budensis

Neumann János INFORMATIKAI KAR

Irányítástechnika
4. előadás

Dr. Kovács Levente

2013. 04. 30.

Tartalom

- Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete
- Bode diagram példák
- Frekvencia átviteli függvény
- Hurwitz kritérium
- A szabályozási kör ugrásválasza, minőségi követelmények
- A lineáris rendszer mozgása
- Állandósult állapot

Tartalom

- Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete
- Bode diagram példák
- Frekvencia átviteli függvény
- Hurwitz kritérium
- A szabályozási kör ugrásválasza, minőségi követelmények
- A lineáris rendszer mozgása
- Állandósult állapot

Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

- **Arányos (P) tag**

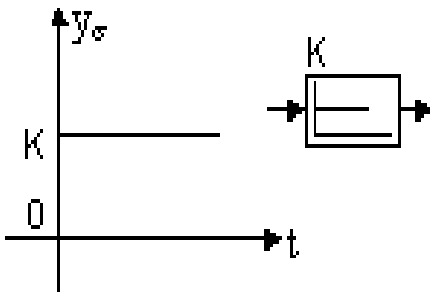
$y(t) = k\,u(t)$

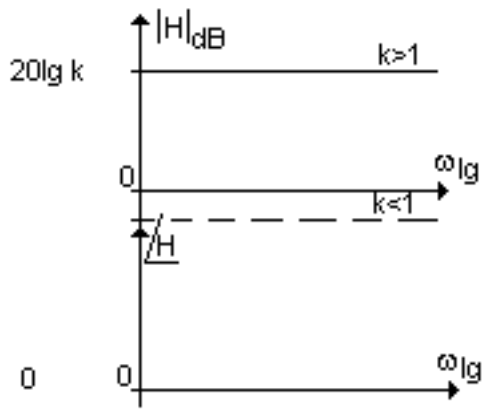
$y_\sigma(t) = k\,\sigma(t)$

$|H|_{dB} = 20 \lg k$

$H(s) = k$

$(k > 0)$





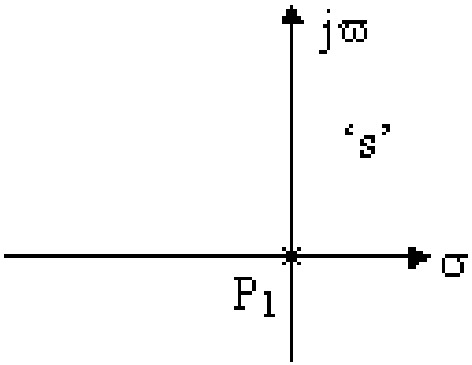
Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

- **Integráló (I) tag**

$$y(t) = k\int u(\tau)d\tau$$

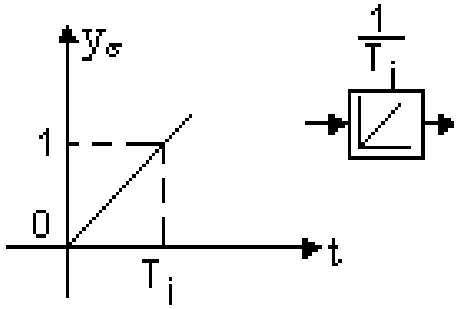
$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T_i}u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{sT_i} \qquad T_i > 0$$



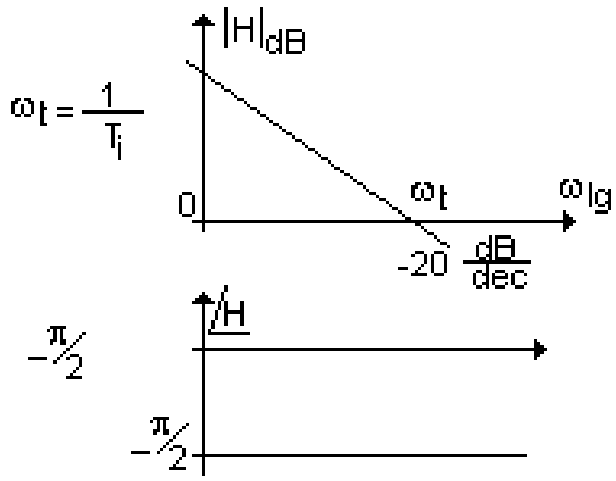
$p_1 = 0$

$$y_\sigma(t) = \frac{1}{T_i}t\sigma(t)$$



$|H|_{dB} = 20 \lg k - 20 \lg \omega$

$\arg\{H\} = -\pi/2$



Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

- **Differenciáló (D) tag**

$y(t) = T_d\, ú(t)$

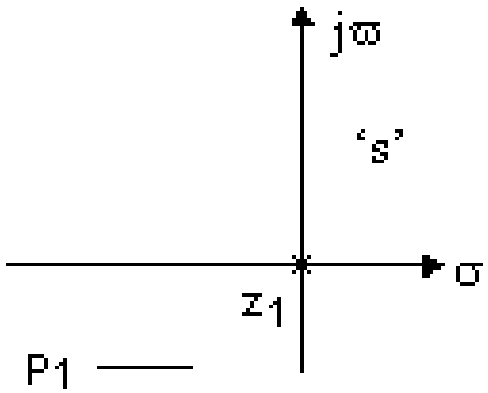
$H(s) = s\, T_d \quad (T_d > 0)$

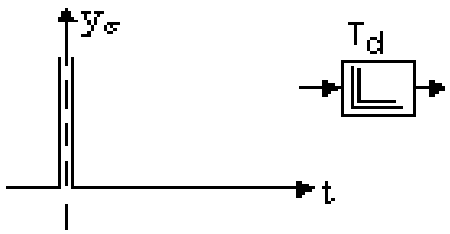
$(m > n)$

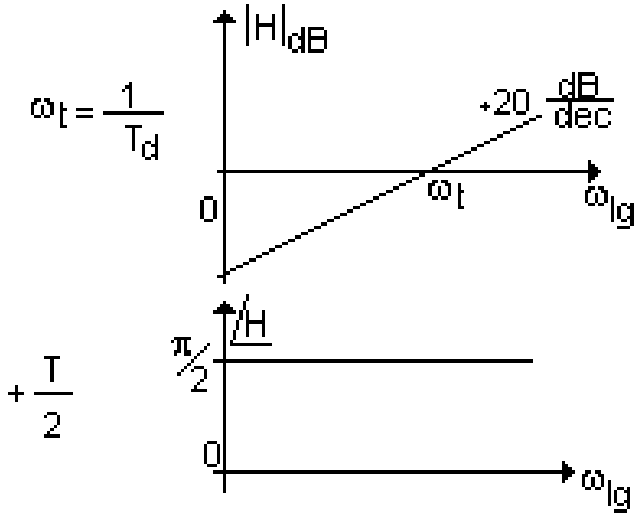
$|H|_{dB} = 20 \lg k + 20 \lg \omega$

$\arg\{H\} = +\pi/2$

$$y_\sigma(t) = T_d\, \sigma(t)$$







$z_1 = 0$

Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

- **Egytárolós arányos tag (PT1)**

$$T_* y(t) + y(t) = k\,u(t)$$

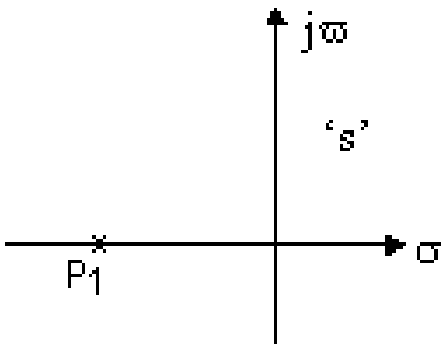
$$H(s) = \frac{k}{1+sT}$$

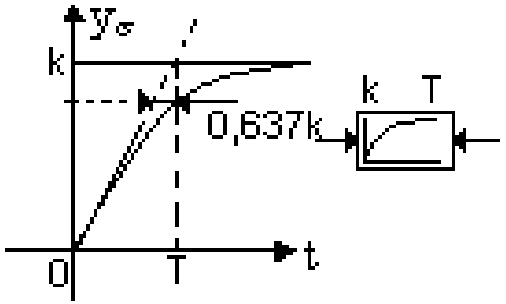
$$y_\sigma(t) = k\left(1 - e^{-t/T}\right)\sigma(t)$$

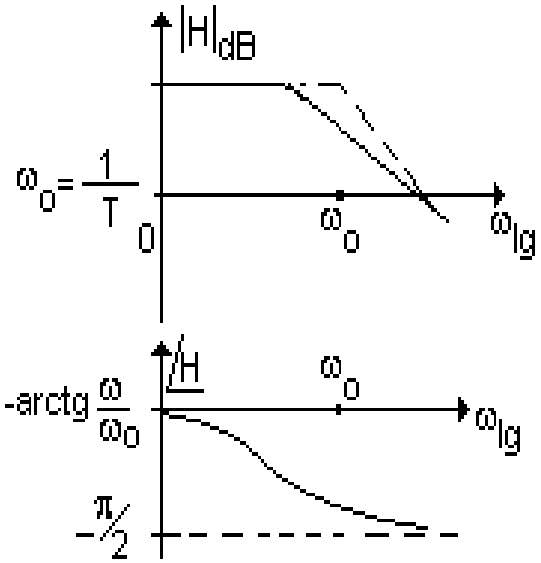
$$|H|_{dB} = 20\lg k - 20\lg\left(\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}\right)$$

$$\arg\{H\} = \operatorname{arctg}(\omega/\omega_0)$$

$k > 0, \quad T > 0$







$$p_1 = -1/T$$

Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

- **PD**

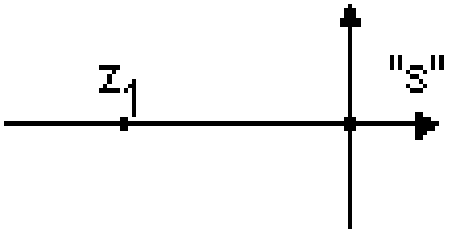
$$y = k\left(u + T_d \dot{u}\right)$$

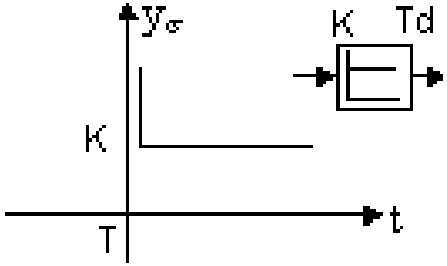
$$y_\sigma = K(\sigma(t) + T_d \delta(t))$$

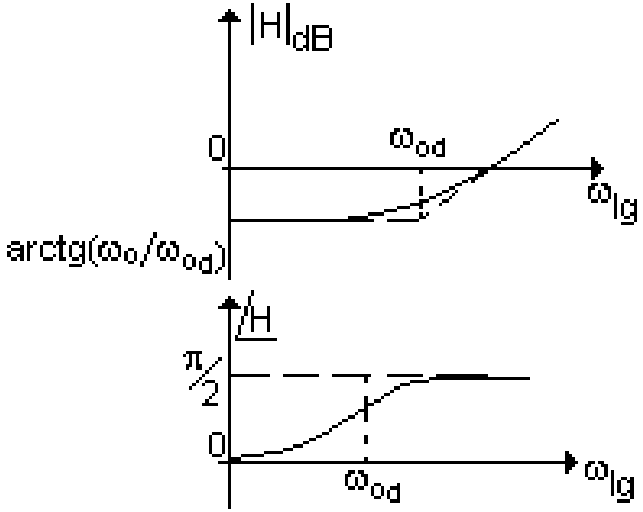
$$20\lg k + 20\lg\sqrt{1 + (\omega/\omega_{0i})^2}$$

$H(s) = k\,(1+sT_d)$

$m > n\ ,\quad T_d > 0$







p_1 : --- ; $z_1 = -1/T_d$

Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

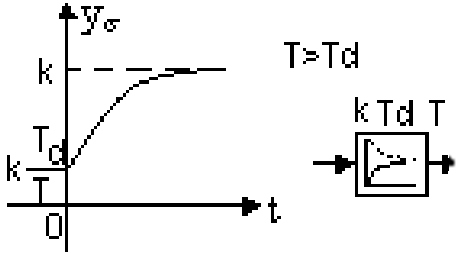
- **PDT1**

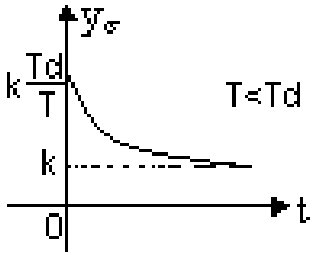
$$T\dot{y} + y = k(u + T_d\dot{u})$$

$$H(s) = \frac{k(1+sT_d)}{1+sT}$$

k>0, T>0, T_d>0,

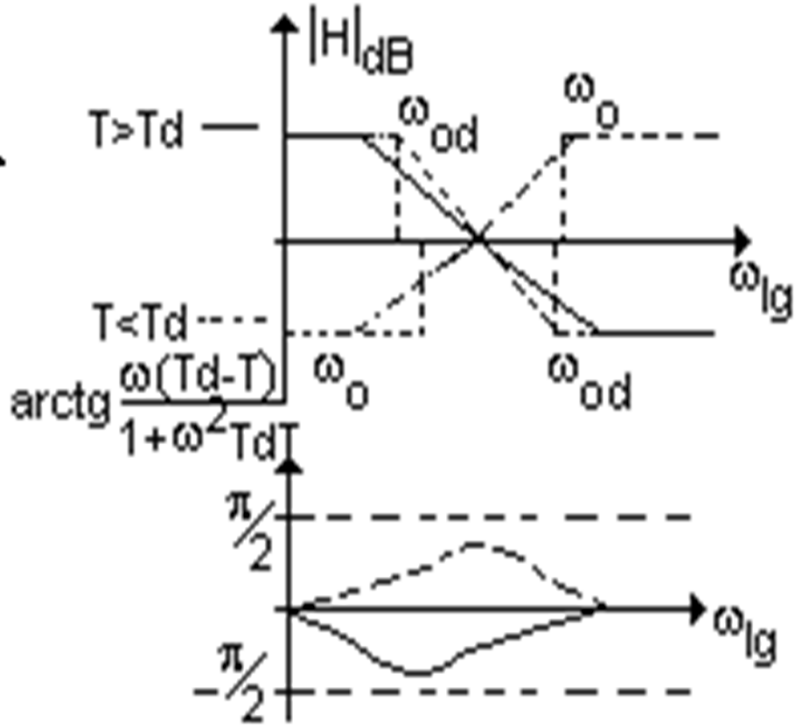
$$y_\sigma(t) = k\left(1 + \frac{T_d}{T}e^{-t/T}\right)\sigma(t)$$



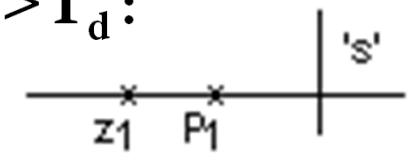


$$20\lg k + 20\lg\sqrt{1+(\omega/\omega_{0d})^2}$$

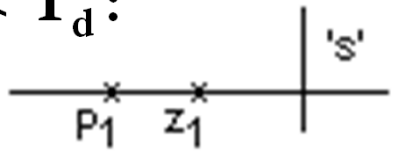
$$-20\lg\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}$$



T >T_d:



T < T_d:



$p_1 = -1/T$, $z_1 = -1/T_d$

Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

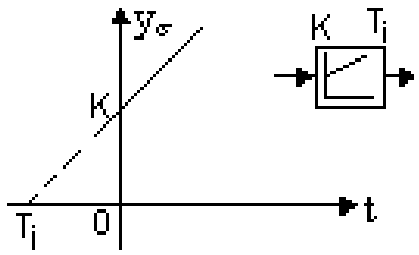
- **PI**

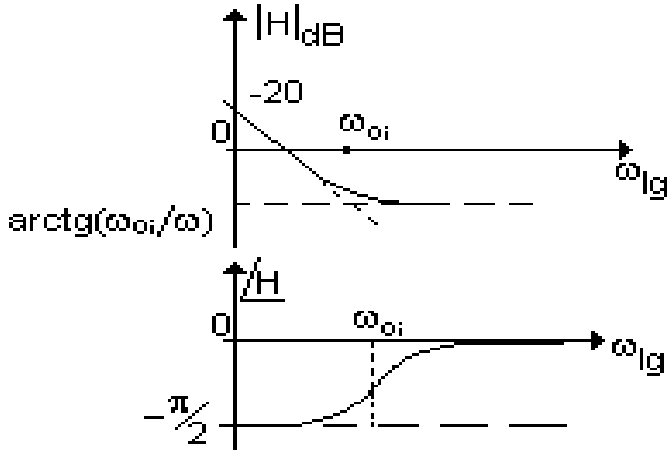
$$y = K\left(u + \frac{1}{T_i}\int_0^t u(\tau)d\tau\right)$$

$$y_\sigma = K\left(1 + \frac{t}{T_i}\right)\sigma(t)$$

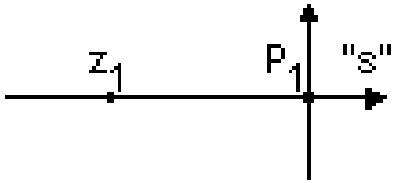
$$20\lg K - 20\lg(\omega/\omega_{0i}) + + 20\lg\sqrt{1+(\omega/\omega_{0i})^2}$$

$$H(s) = \frac{K}{sT_i}(1+sT_i)$$





$K > 0 \quad ; \quad T_i > 0$



$p_1 = 0 \quad ; \quad z_1 = -1/T_i$

Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

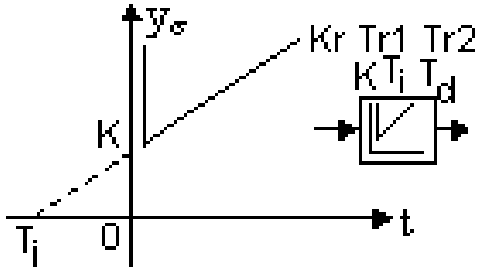
- **PID**

$$y = K_R\left(u + \frac{1}{T_i}\int u\,d\tau + T_d\dot{u}\right)$$

$$H(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$$

$K_R > 0;\ T_i > 0;\ T_d > 0$

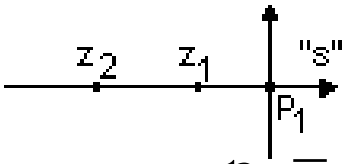
$$y_\sigma = K_R[\sigma(t) + \frac{t}{T_i}\sigma(t) + T_d\delta(t)]$$



ha $T_i > 4T_d$:

$$H(s) = \frac{k_r}{s}(1 + sT_{r1})(1 + sT_{r2})$$

$k_r > 0$, $T_{r1} > 0$, $T_{r2} > 0$



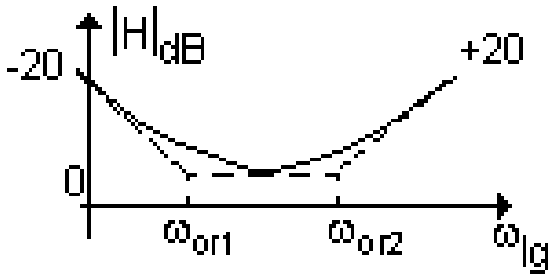
$p_1 = 0;\quad z_1 = -1/T_{r1}$;

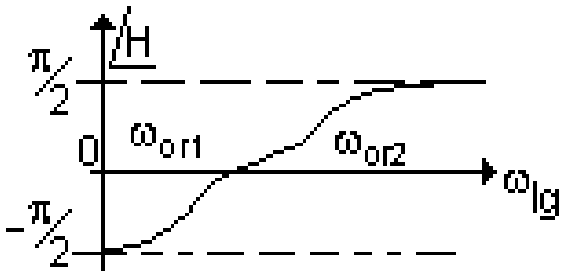
$z_2 = -1/T_2$

$m > n$

$$20\lg k_r - 20\lg\omega + 20\lg\sqrt{1 + (\omega/\omega_{0r1})^2} + 20\lg\sqrt{1 + (\omega/\omega_{0r2})^2}$$

$$-\,arctg\,\frac{1 - \omega^2/(\omega_{0r1} - \omega_{0r2})}{\omega/\omega_{0r1} - \omega/\omega_{0r2}}$$





Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

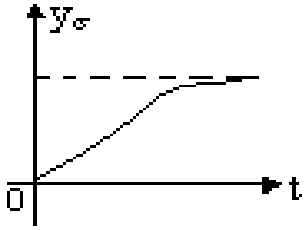
- **Kéttárolós arányos tag (PT2)**

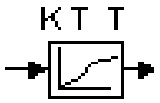
$$T^2\ddot{y} + 2\xi T\dot{y} + y = ku$$

$$H(s) = \frac{k}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2}$$

$$y_\sigma = \frac{K}{T_1 - T_2}\left(T_1 e^{-t/T1} - T_2 e^{t/T2}\right)$$

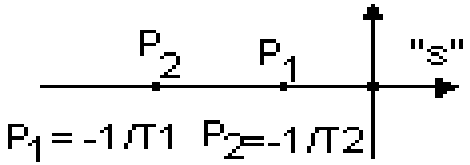
$$20\lg k - 20\lg\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2\right\}^{1/2}$$



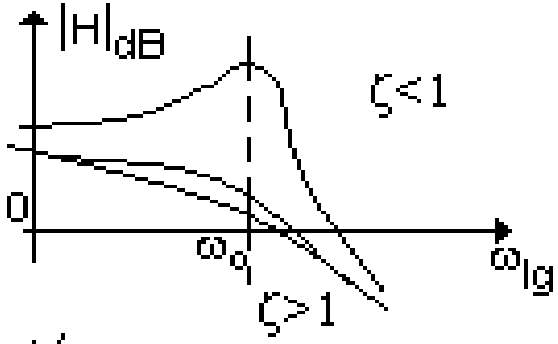


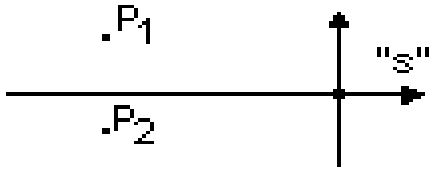
$$\operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

k >0 , T>0 , ξ > 0



$$y_\sigma = K - \frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \varphi\right)$$

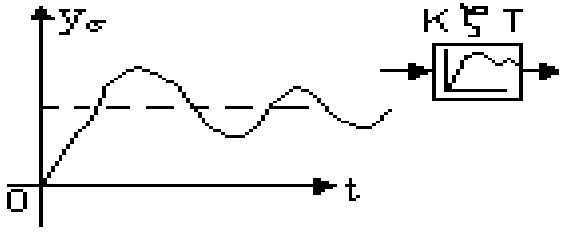


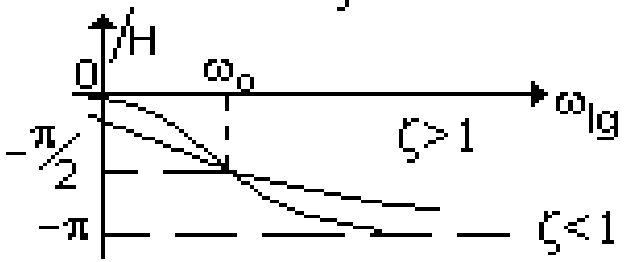


$$tg\,\varphi = \frac{1}{\xi}\sqrt{1-\xi^2} \qquad \varphi \in (0, -\pi)$$

$$0 < \xi < 1$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{T}\left(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

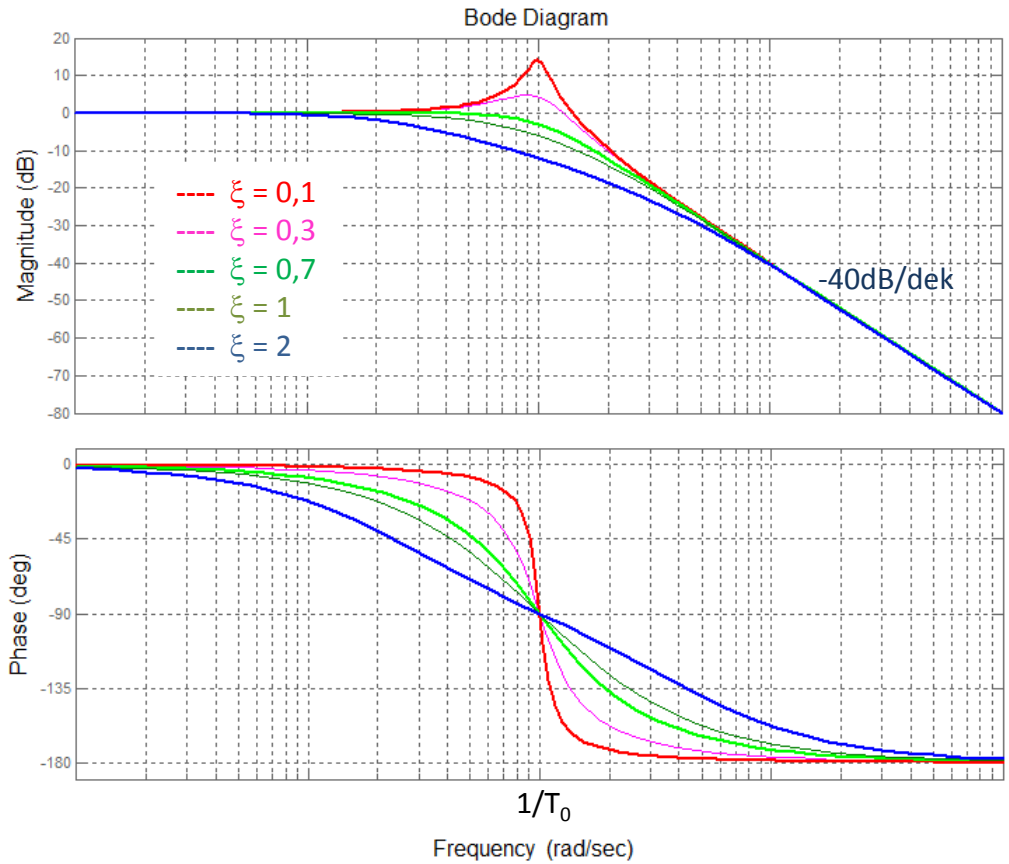




Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

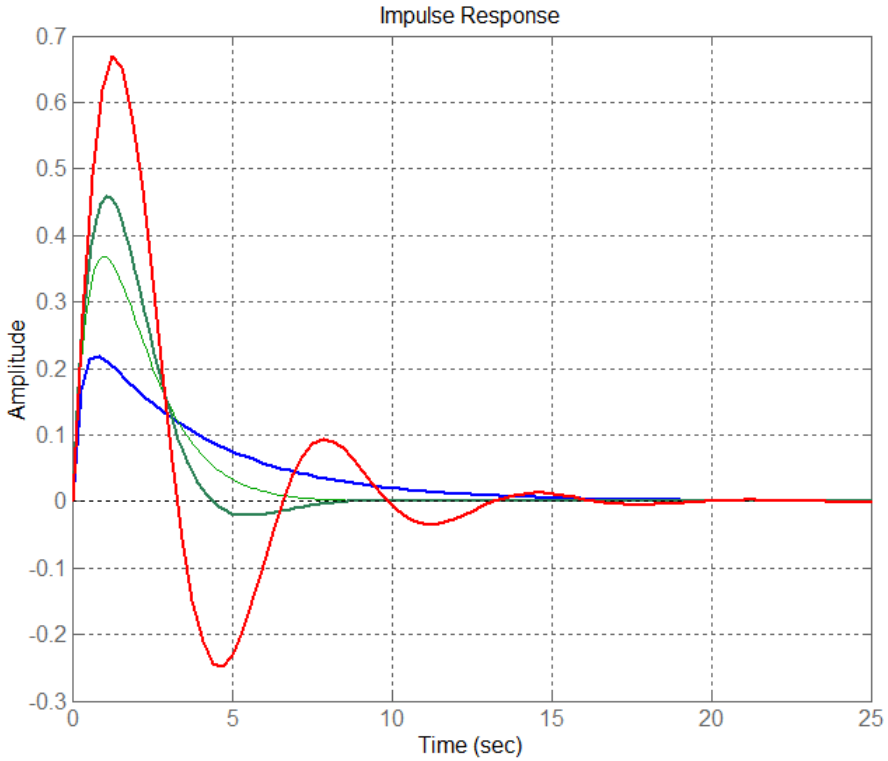
Kéttárolós arányos tag (PT2)

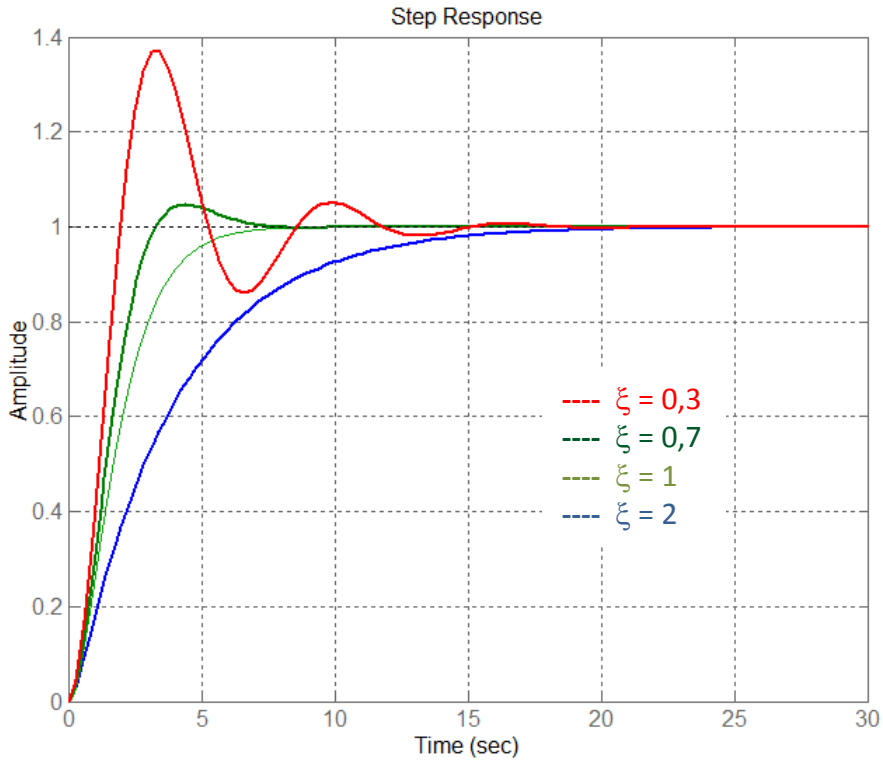
- Az $w < 1/T_0$ tartományon arányos (P) taggal közelíthető
- Az $w > 1/T_0$ tartományon $w(jw) \approx -1/(w^2T_0^2)$ kétszeresen integráló taggal közelíthető
- Az $w_0 = 1/T_0$ körüli frekvenciákon a frekvencia átviteli tulajdonságok a x csillapítási tényezőtől függenek
- Az w_0 vágási frekvencián
  - az amplitúdó $1/(2\xi)$
  - a fázisszög -90°



Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete

- **Kéttárolós arányos tag (PT2)**
  - $\xi > 1$ esetben valós pólusok
    - aperiodikusan csillapított tag
  - $\xi < 1$ esetben komplex-konjugált pólusok
    - periodikusan csillapított vagy lengő tag $w_p = w_0\sqrt{1-\xi^2}$ lengési frekvenciával





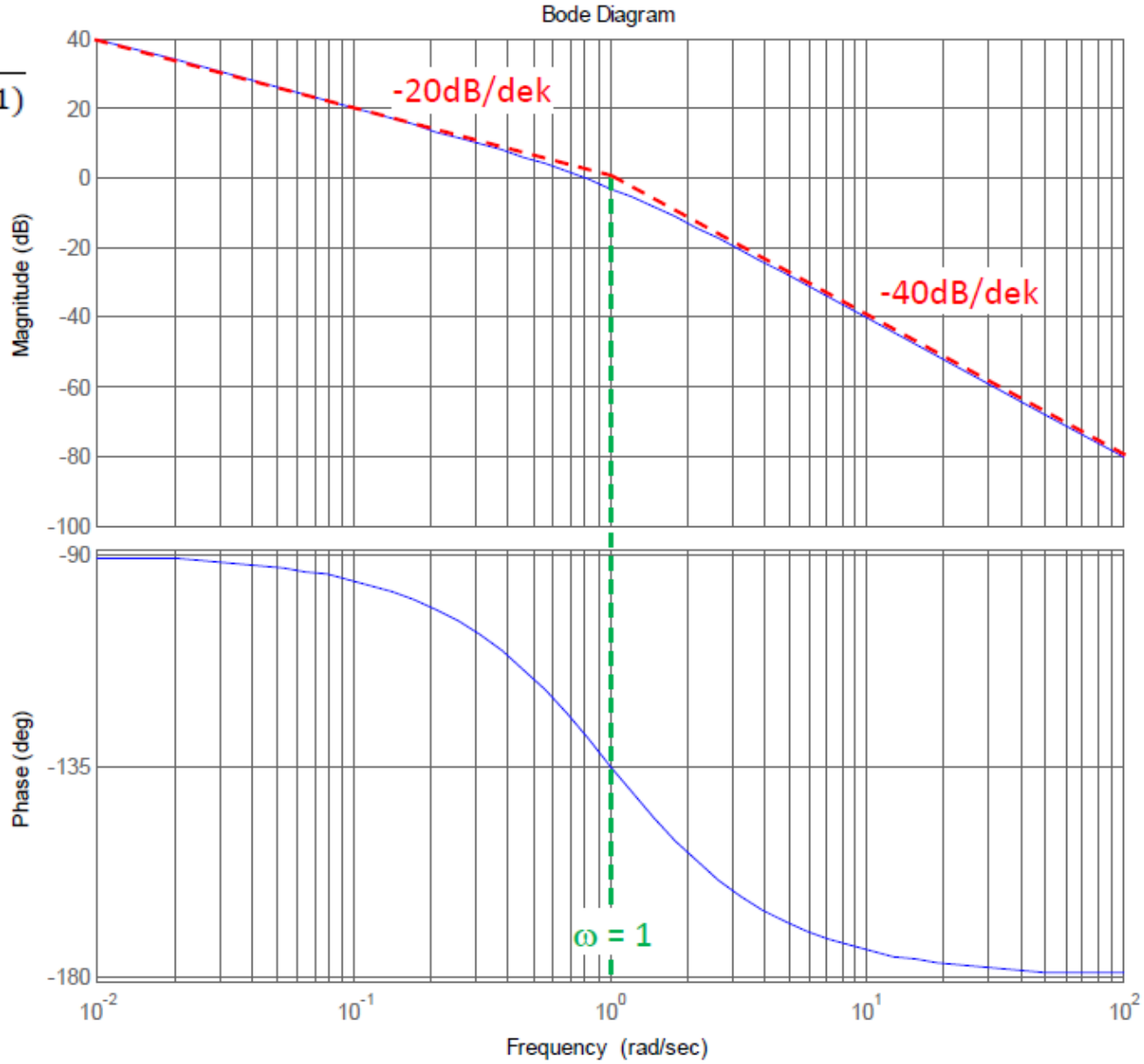
Tartalom

- Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete
- Bode diagram példák
- Frekvencia átviteli függvény
- Hurwitz kritérium
- A szabályozási kör ugrásválasza, minőségi követelmények
- A lineáris rendszer mozgása
- Állandósult állapot

Bode diagram (példa 1)

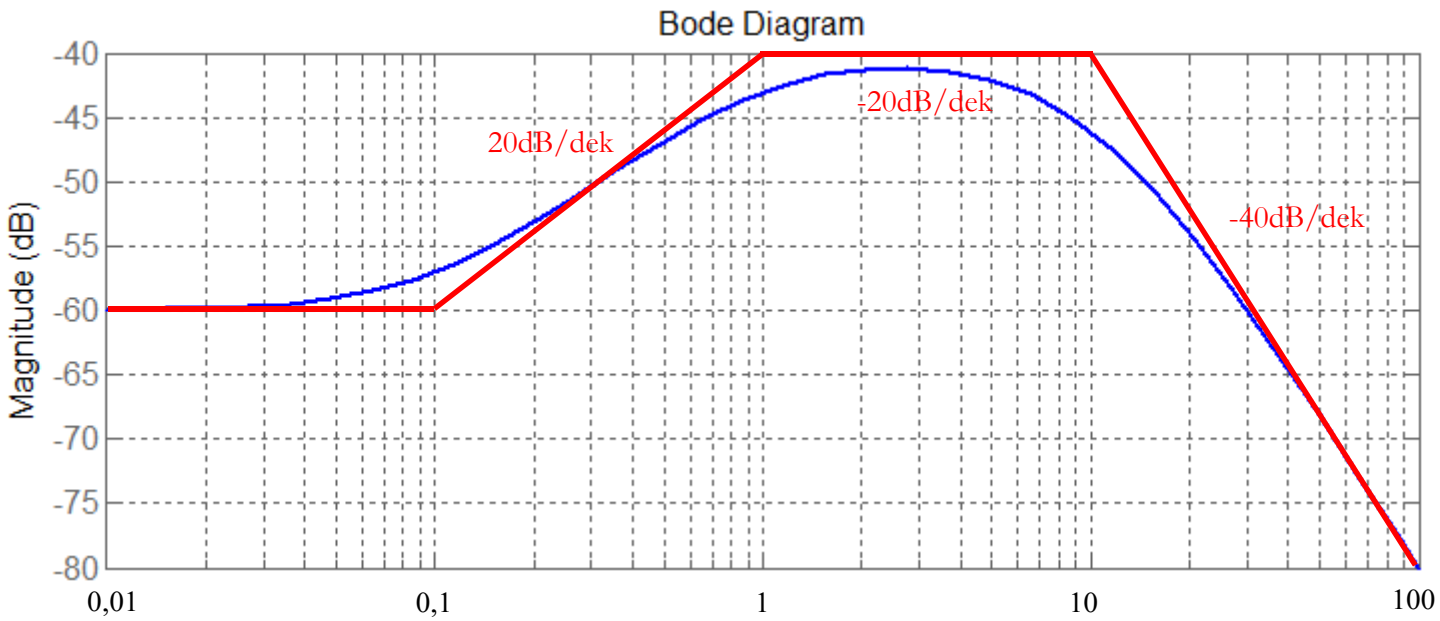
$$w(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{sT_1} \cdot \frac{1}{(sT_2+1)}$$

$$T_1 = T_2 = 1$$



Bode diagram (példa 2)

$$w(j\omega) = \frac{s + 0{,}1}{(s+1)(s+10)(s+10)}$$



A fázis diagramra általában nem kielégítő a töréspontos közelítés (főleg nagyobb fokszám esetén)

Bode diagram (példa 3)

Amplitúdó menet töréspontos közelítése

$$w_0(s) = \frac{20000}{(s^2 + 101s + 100)(s + 20)}$$

időállandós alak:

$$w_0(s) = \frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)} = \frac{20}{20} \cdot \frac{100}{100} \frac{20000}{(s+1)(s+20)(s+100)}$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{20000}{(s+1)(0{,}05s+1)(0{,}01s+1)} = \frac{10}{(s+1)(0{,}05s+1)(0{,}01s+1)}$$

s = jω = 0 helyettesítéssel:

$$w_0(0) = 10 \quad \longrightarrow \quad a_{[dB]}(0) = 20lg10 = 20dB$$

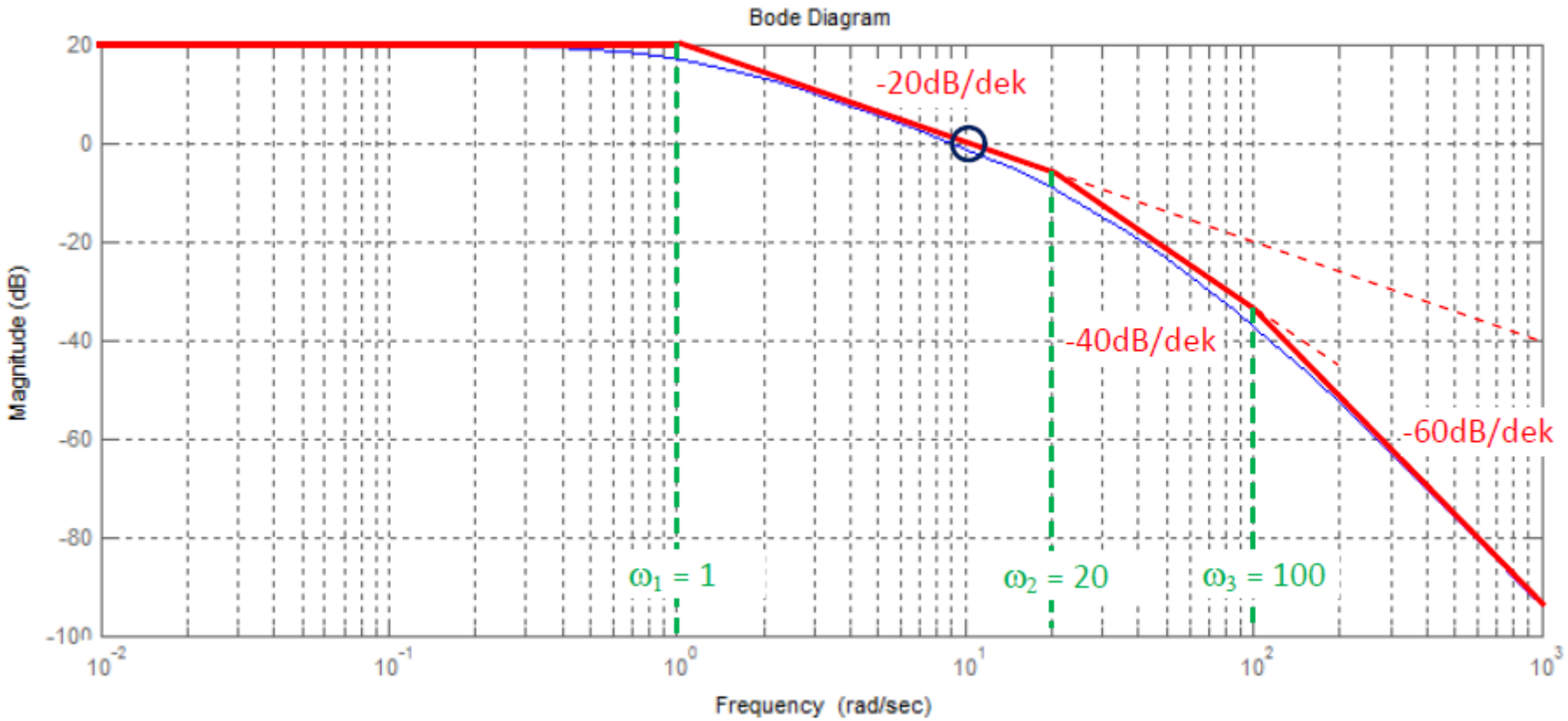
a három törésponti frekvencia:

ω_1 = 1 rad/sec $\qquad$ ω_2 = 20 rad/sec $\qquad$ ω_3 = 100 rad/sec

Bode diagram (példa 3)

Amplitúdó menet töréspontos közelítése

- 0-tól ω_1–ig 20dB-es erősítés
- ω_1–től ω_2–ig -20dB/dekádos meredekségű szakasz
- ω_2–től ω_3–ig -40dB/dekádos meredekségű szakasz
- ω_3–tól -60dB/dekádos meredekségű



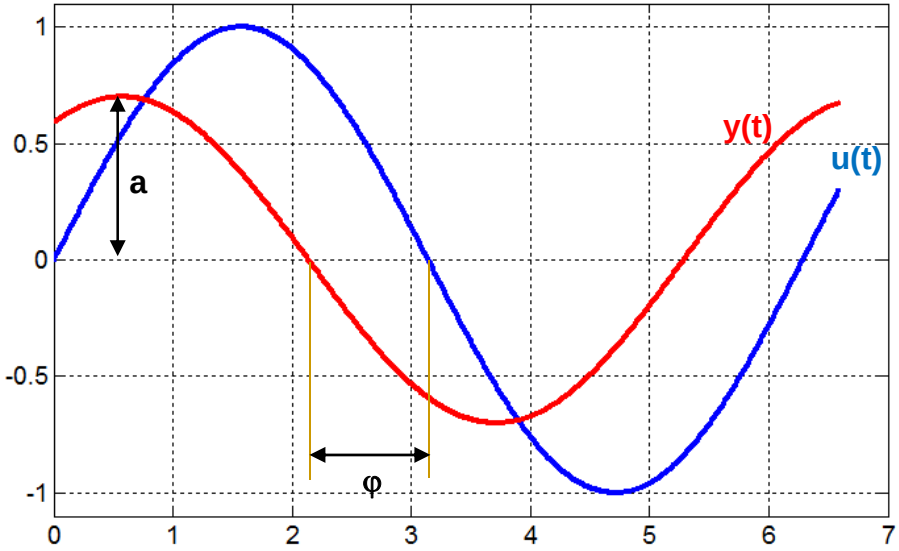
Tartalom

- Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete
- Bode diagram példák
- Frekvencia átviteli függvény
- Hurwitz kritérium
- A szabályozási kör ugrásválasza, minőségi követelmények
- A lineáris rendszer mozgása
- Állandósult állapot

Frekvencia átviteli függvény

- Az u(s) bemenő és y(s) kimenő jel közötti kapcsolatot leíró w(s) átviteli függvényből
  - s = jw helyettesítéssel $w(j\omega) = w(s)|_{s=j\omega}$
  - Stabilis lineáris tag esetén egységnyi amplitúdójú zérus fázisú szinuszos bemenő jelre

$$u(t) = sin(\omega t) \qquad y(t) = a\, sin(\omega t + \varphi)$$



Tartalom

- Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete
- Bode diagram példák
- Frekvencia átviteli függvény
- Hurwitz kritérium
- A szabályozási kör ugrásválasza, minőségi követelmények
- A lineáris rendszer mozgása
- Állandósult állapot

Hurwitz kritérium. H determináns.

Zárt rendszer ! $$W(s)=\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

$$\Delta(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0$$

Karakterisztikus polinom

Hurwitz determináns

$$\begin{array}{r} H_1 \leftarrow \\ H_2 \leftarrow \\ H_3 \leftarrow \end{array} \quad H=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Hurwitz kritérium. Megfogalmazás.

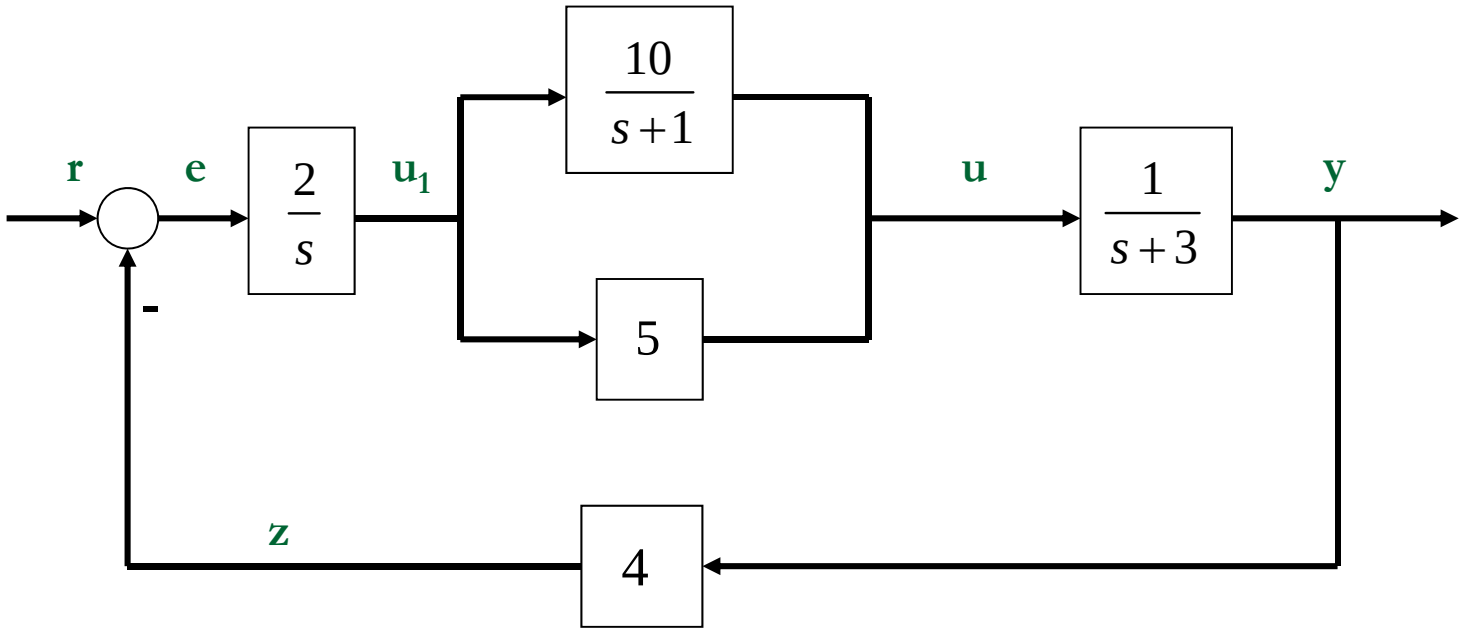
1. $a_i > 0$ (szigorúan!!), i = 1…n (rendszer fokszáma)

2. $H_i > 0$ (szigorúan!!), i = 1…n (rendszer fokszáma)

Ha 1 + 2 teljesül, akkor a rendszer stabilis!

Megj.: Stabilitási határ (kritikus körerősítés) számítása.

Példa



$$W(s) = \frac{10}{s^2 + s + 40}$$

Z = -3
P = -0.5000 + 6.3048i
-0.5000 - 6.3048i
-3.0000

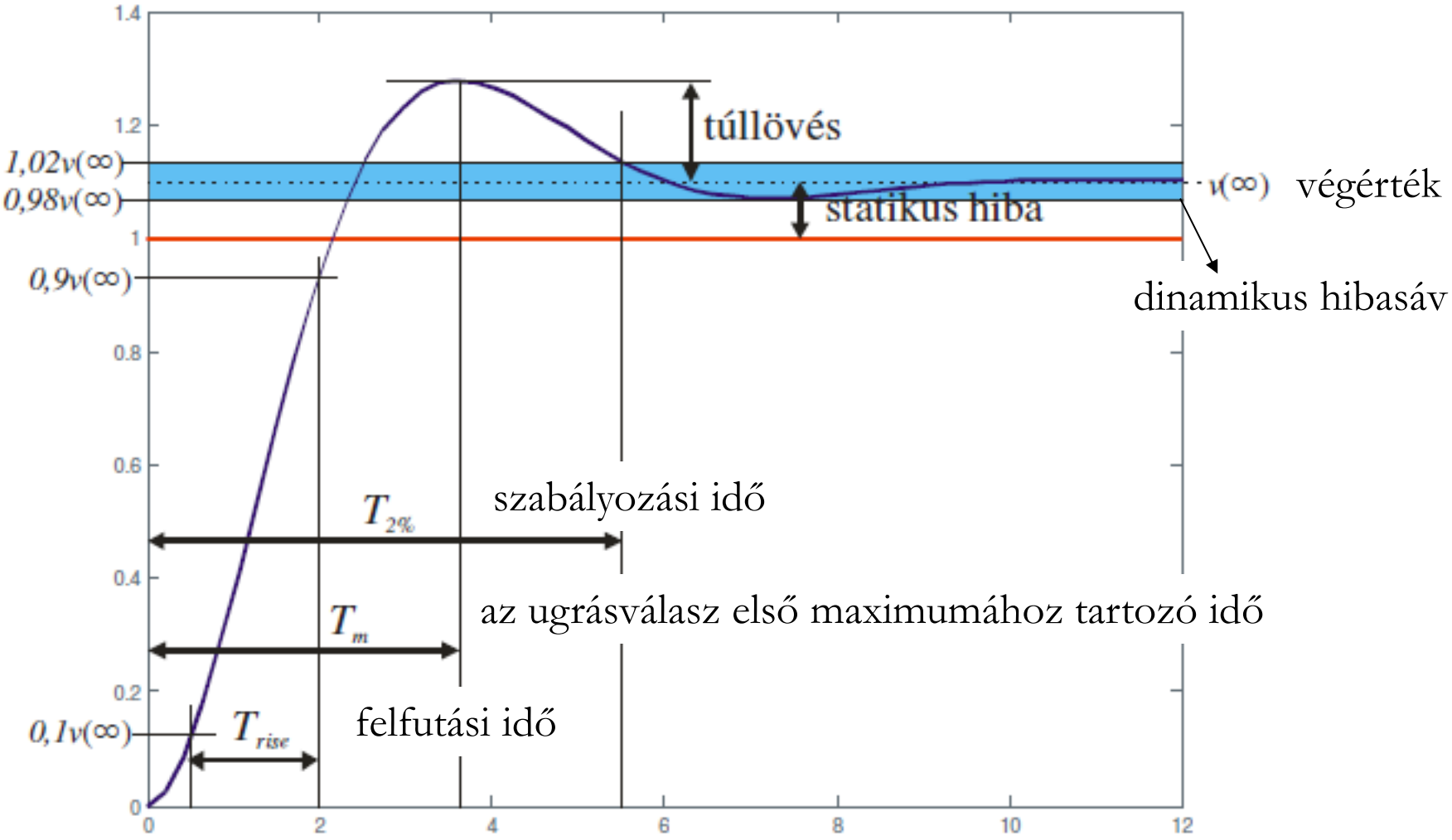
Tartalom

- Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete
- Bode diagram példák
- Frekvencia átviteli függvény
- Hurwitz kritérium
- A szabályozási kör ugrásválasza, minőségi követelmények
- A lineáris rendszer mozgása
- Állandósult állapot

A szabályozási kör ugrásválasza

- A zárt szabályozási kör ugrásválaszáról (a $v(t)$ átmenti függvényről) leolvashatók a szabályozási kör időtartománybeli jellemzői.
- Általános elvárás, hogy a szabályozott jellemző $y(t)$ időfüggvénye minél pontosabban kövesse az alapjel $r(t)$ időfüggvényét.

A szabályozási kör ugrásválasza



Minőségi követelmények

Jellemző	Magyarázat
Végérték	$v(\infty)$ az ugrásválasz végértéke
Statikus hiba	Az ugrásválasz végértékének előjeles távolsága a bemenetre adott egységugrás végértékétől, azaz 1-től: $e(\infty) = 1 - v(\infty)$
Túllövés	$\Delta v = \dfrac{v(T_m) - v(\infty)}{v(\infty)}$ (százalékban is megadható), ahol T_m az ugrásválasz első maximumához tartozó idő.
Felfutási idő	T_{rise}, a $0{,}1v(\infty)$ és a $0{,}9v(\infty)$ értékek felvétele között eltelt idő.
2%-os szabályozási idő	A végérték körüli $0{,}04v(\infty)$ szélességű sávba történő belépéshez szükséges idő.

Tartalom

- Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete
- Bode diagram példák
- Frekvencia átviteli függvény
- Hurwitz kritérium
- A szabályozási kör ugrásválasza, minőségi követelmények
- A lineáris rendszer mozgása
- Állandósult állapot

A lineáris rendszer mozgása

- **Nyugalmi állapot**
  - Egyensúlyi állapotban valamennyi állapotváltozó mozgása megszűnik, x(t) = állandó

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

- **Saját mozgás**
  - A nyugalmi helyzetéből kitérített majd (pl. a t = 0 időpontban) magára hagyott rendszer mozgása
- **Gerjesztett mozgás**
  - A nyugalmi helyzetben lévő rendszerre adott bemenő jel vált ki
- **Stabilis rendszer**
  - A nyugalmi helyzetéből kitérített majd magára hagyott rendszer visszatér nyugalmi helyzetébe vagy annak közeli környezetébe
- **Labilis rendszer**
  - A nyugalmi helyzetéből kitérített majd magára hagyott rendszer nem tér vissza nyugalmi helyzetébe vagy annak közeli környezetébe

Tartalom

- Tipikus tagok amplitúdó- és fázismenete
- Bode diagram példák
- Frekvencia átviteli függvény
- Hurwitz kritérium
- A szabályozási kör ugrásválasza, minőségi követelmények
- A lineáris rendszer mozgása
- Állandósult állapot

Állandósult állapot

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\longrightarrow$$

$$0 = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} sW(s)\frac{1}{s}u_\infty$$

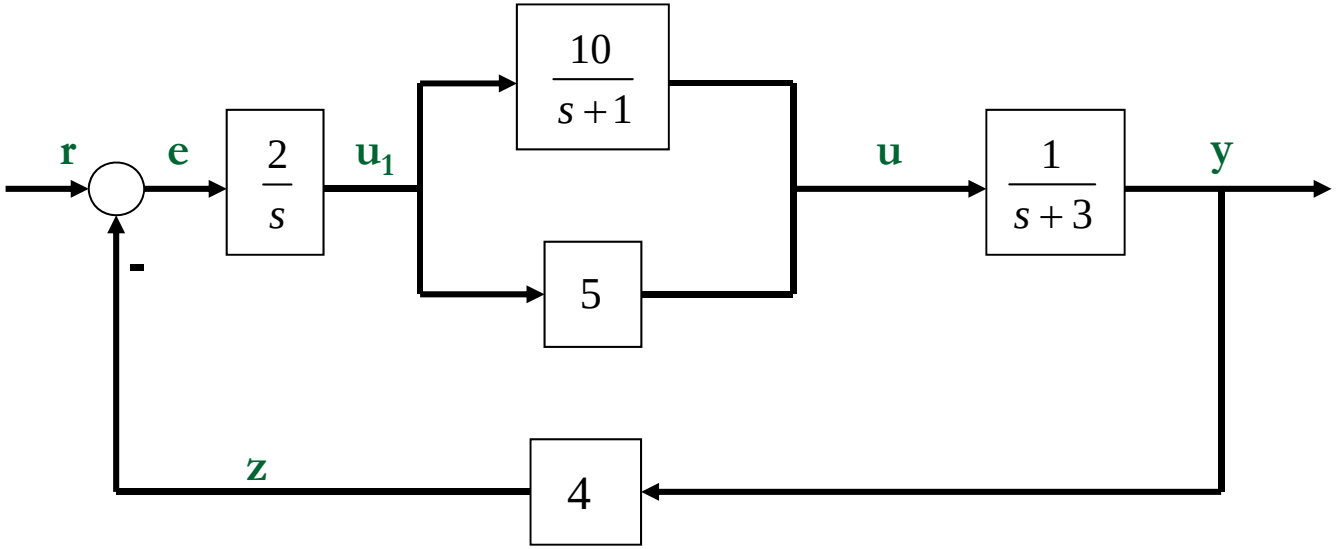
A Laplace végérték tétel

az állandósult állapot (ha t → ∞) jelei számíthatók, amikor s → 0

Típus	Bemenet	Kimenet	Átviteli fv.
P	$u_\infty \neq 0$	$y_\infty \neq 0$	$y_\infty = \frac{b_0}{a_0}u_\infty$
I	$u_\infty = 0$ (!!)	$y_\infty \neq 0$	?
D	$u_\infty \neq 0$	$y_\infty = 0$ (!!)	0

$$W(s) = \frac{W_0}{1+W_0} = \frac{k_0}{1+k_0} < 1$$

Példa



Laplace tartomány:

Kezdeti feltétel: $r_\infty=1$

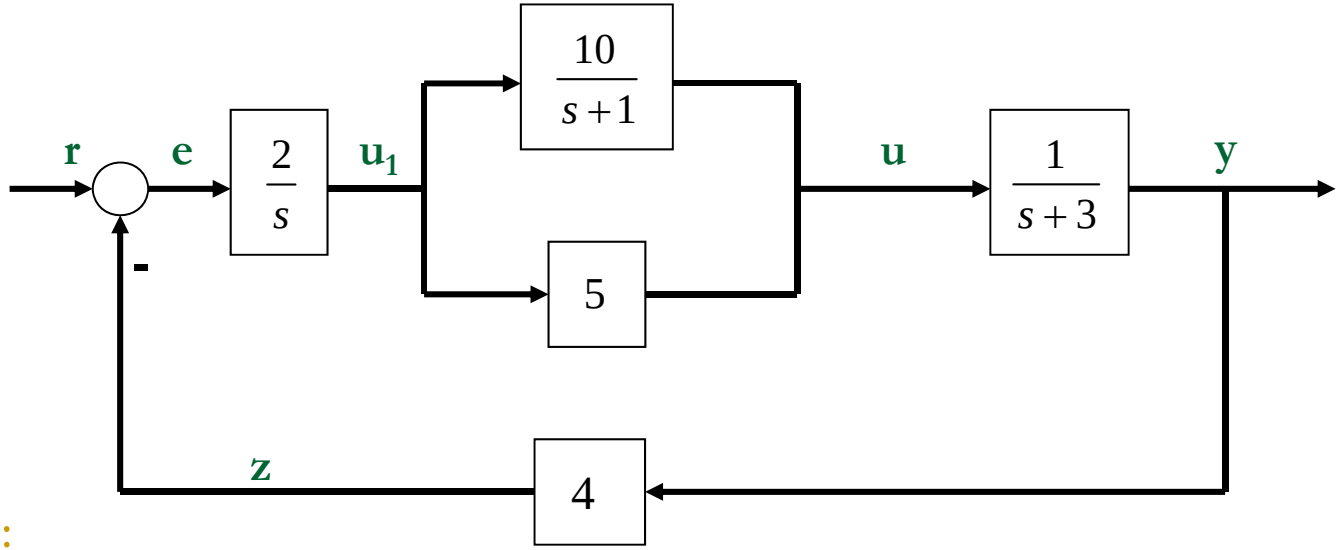
$$e(s) = r(s) - z(s)$$
$$z(s) = 4 \cdot y(s)$$
$$y(s) = \frac{1}{s+3} \cdot u(s)$$
$$u(s) = \left(\frac{10}{s+1} + 5\right) \cdot u_1(s)$$
$$u_1(s) = \frac{2}{s} \cdot e(s)$$

$$\Rightarrow \quad e(s) = r(s) - 4 \cdot \frac{1}{s+3} \cdot \left(\frac{10}{s+1} + 5\right) \cdot \frac{2}{s} \cdot e(s)$$

ha $s \to 0$, akkor $2/s \to \infty$

r_∞ csak akkor lehet véges ($r_\infty=1$), ha $e_\infty = 0$

Példa



Időtartomány (ha s=0):

Kezdeti feltétel: $r_\infty=1$

$$e_\infty = r_\infty - z_\infty$$ ⇒ felhasználva, hogy $e_\infty = 0$ ⇒ $z_\infty=1$

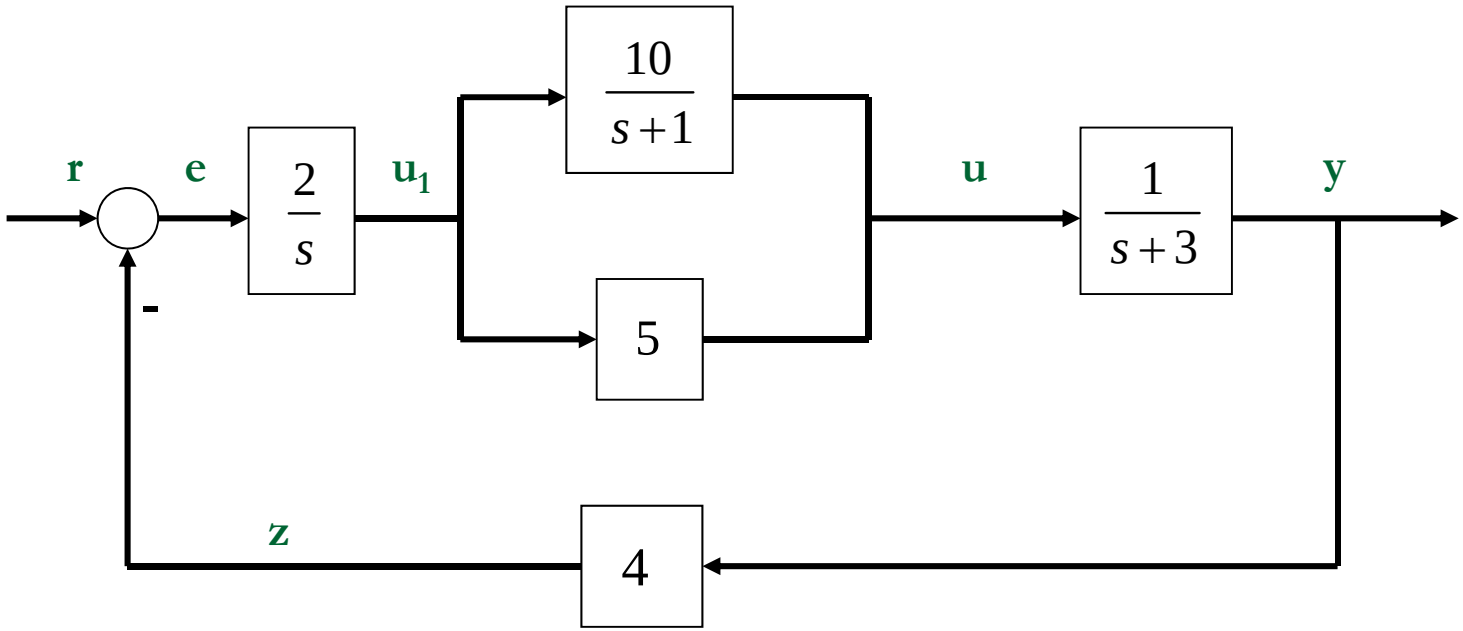
$$z_\infty = 4 \cdot y_\infty$$ ⇒ felhasználva, hogy $z_\infty = 1$ ⇒ $y_\infty=0.25$

$$y_\infty = \frac{1}{0+3} \cdot u_\infty$$ ⇒ felhasználva, hogy $y_\infty=0.25$ ⇒ $u_\infty=0.75$

$$u_\infty = \left(\frac{10}{0+1} + 5\right) \cdot u_{1\infty}$$ ⇒ felhasználva, hogy $u_\infty=0.75$ ⇒ $u_{1\infty}=0.05$

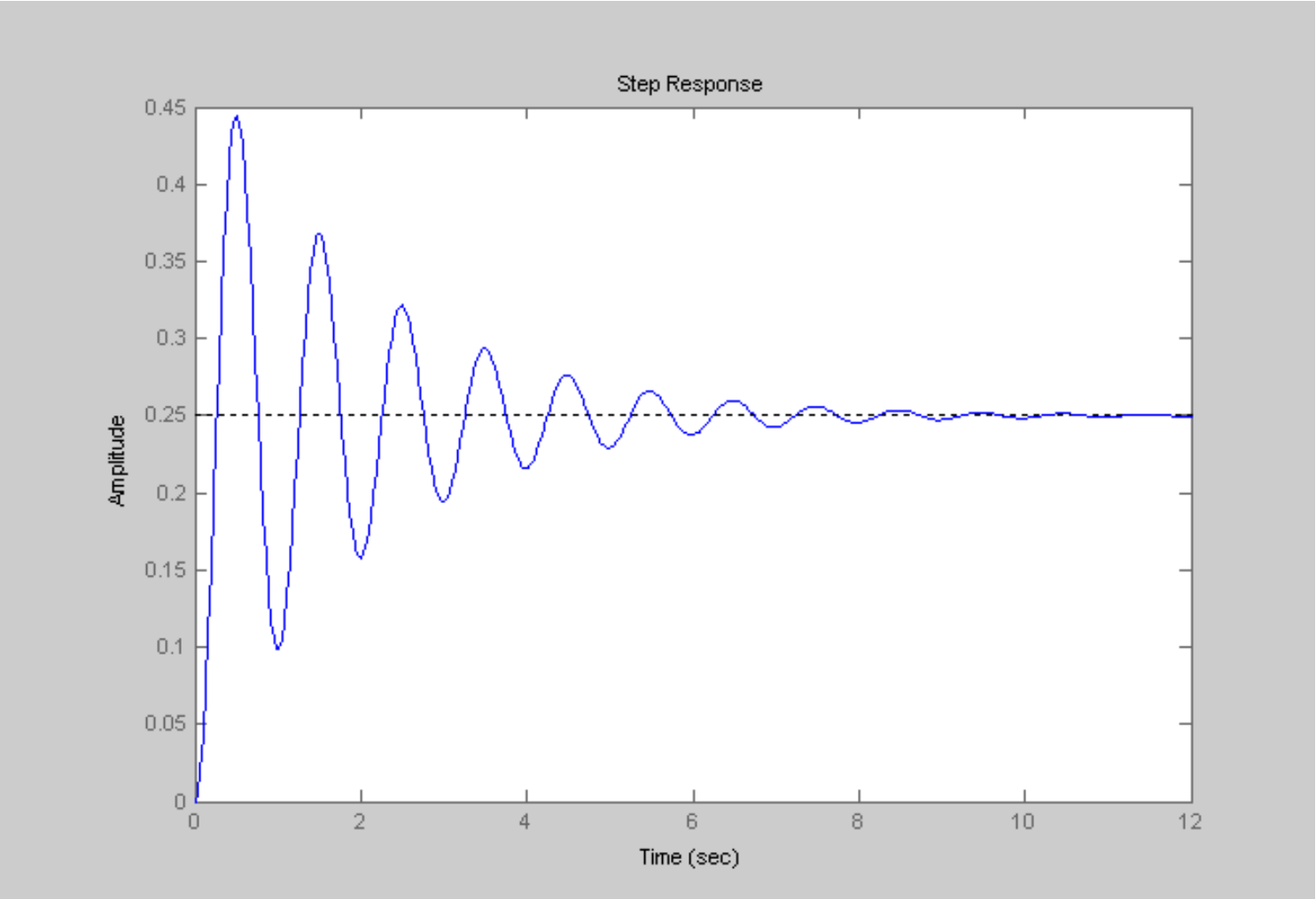
$$u_{1\infty} = \frac{2}{0} \cdot e_\infty$$

Példa



Kezdeti feltétel: $r_\infty=1$

$e_\infty=0$; $z_\infty=1$; $y_\infty=0.25$; $u_\infty=0.75$; $u_{1\infty}=0.05$;


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10
12

Köszönöm a figyelmet!

kovacs.levente@nik.uni-obuda.hu