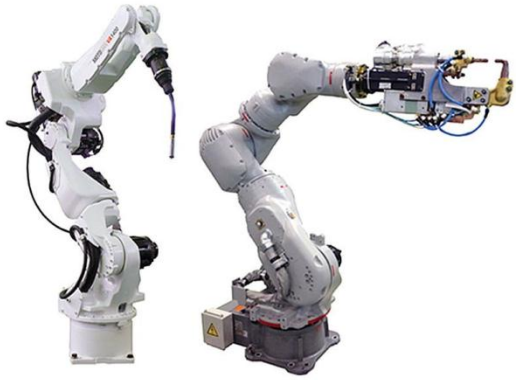
Irányítástechnika

Dr. Turóczi Antal
turoczi.antal@nik.uni-obuda.hu

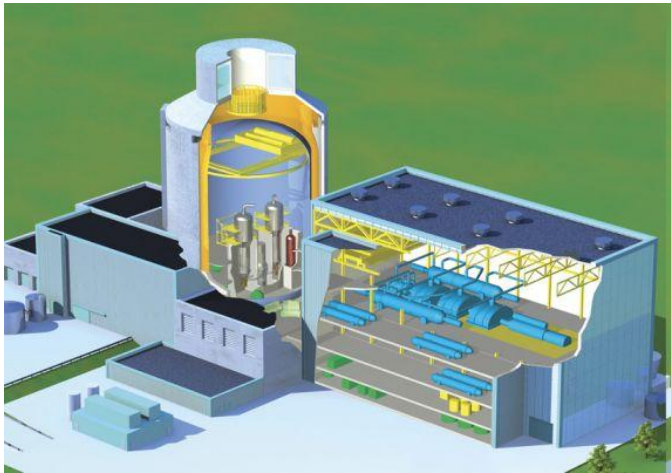
Bevezető

- A tárgy célja
  - Irányítástechnikai
    - alapfogalmak
    - alapismeretek
    - módszerek

    megismertetése



- Irányítási rendszerek működésének megértéséhez,
- Mérnöki szemlélet kialakításához



Bevezető

- Tananyag
  - Bevezetés, az irányítástechnika alapfogalmai
  - Matematikai alapok, dinamikus rendszerek
  - Lineáris rendszerek építőelemei, folytonos idejű folyamatok leírása
  - Lineáris folytonos idejű rendszerek stabilitása, minőségi jellemzők
  - Diszkrét idejű folyamatok rendszertechnikai leírása
  - Diszkrét idejű rendszerek stabilitása, minőségi jellemzők
  - Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai
  - Lineáris szabályozás stabilitása, vizsgálati módszerek
  - Szabályzási kör zavarelhárítási tulajdonságai
  - Szabályzási kör szintézise, kompenzációs szabályzók
  - Mintavételes rendszerek tulajdonságai
  - Digitális irányító rendszerek tervezése, felépítése, komponensei, sajátosságai
  - Digitális jelformálás, jelfeldolgozás

Bevezető

- Követelmények
  - Heti óraszámok: 2 óra előadás
  - Számonkérés módja: félév közben: 2 zh,
    - 7. hét - 1.zh (on-line zh, tesztkérdések)
    - 13.hét - 2.zh (on-line zh, tesztkérdések)
    - 14. hét - pót zh-k (on-line zh, tesztkérdések)
  - A vizsgára bocsátás feltétele, hogy mindkét ZH legalább 50%-os eredményű legyen
    - Írásbeli
    - Az első részben alapkérdésekre kell válaszolni (on-line vizsga, tesztkérdések)
    - Az első részben a kapható maximális pontszám legalább 51 százalékát el kell érni ahhoz, hogy a vizsga eredménye elégséges vagy jobb legyen
    - A vizsga második részében példákat kell megoldani
    - A végső pontszám az első és a második részre kapott pontok összege lesz

Bevezető

- Ajánlott irodalom
  - Morócz I.: Irányítástechnika I., KKMF-1164, Budapest
  - Lantos Béla: Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. Egyváltozós szabályozások. Akadémiai Kiadó, 2. kiadás, 2005, ISBN 963 05 8249 X
  - További segédletek
    - http://nik.uni-obuda.hu/vill/Irtech/

Bevezető

- Az irányítás olyan művelet, mely valamely folyamatot elindít, fenntart, megváltoztat vagy megállít
  - Az irányítási művelet során általában kisebb energiájú hatásokkal befolyásolunk nagyobb energiájú folyamatokat. (példa: atomerőmű szabályzórudak, gőz-szelep,stb…)

- „Az irányítástechnika a műszaki tudományok azon ága, amely a különféle (műszaki, biológiai, közgazdasági stb.) területeken az irányítási műveletek általános törvényszerűségeivel, vizsgálati módszereivel és az irányítások tervezésével és realizálásával foglalkozik” [Lantos Béla]

- Az irányítástechnika célja, hogy adott rendszerek viselkedését általunk kívánt tulajdonságúvá, megadott szempontoknak, céloknak megfelelővé tegye.

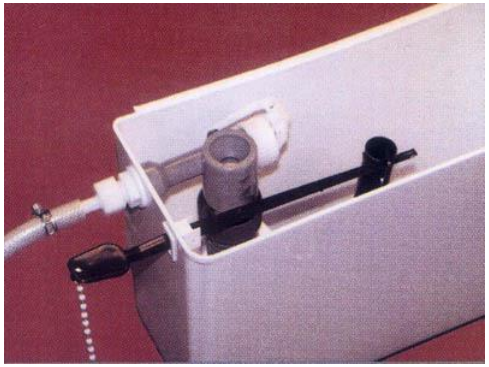
- A technikai fejlődés elengedhetetlen alappillére
- Modern világunk elképzelhetetlen lenne az irányítástechnika vívmányai nélkül
  - Automatizált gyártósorok, ipari robotok, erőművek, repülőgépek, autóipar, vegyipar, űrkutatás…

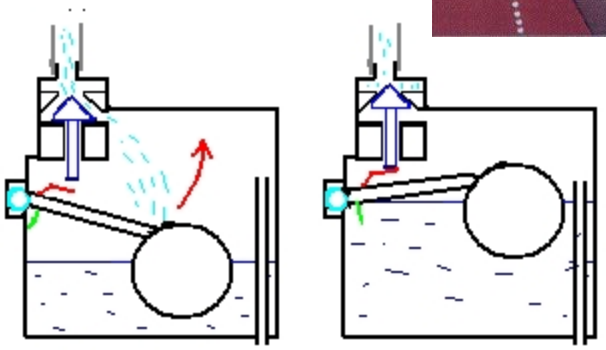
Bevezető

- Példák irányítási rendszerekre:
  - Az emberi testben lejátszódó biokémiai folyamatok
    - Vércukorszint állandó értéken tartása
      - Éhségérzet, evés, táplálék lebontása, raktározás, zsírégetés … stb.

Bevezető

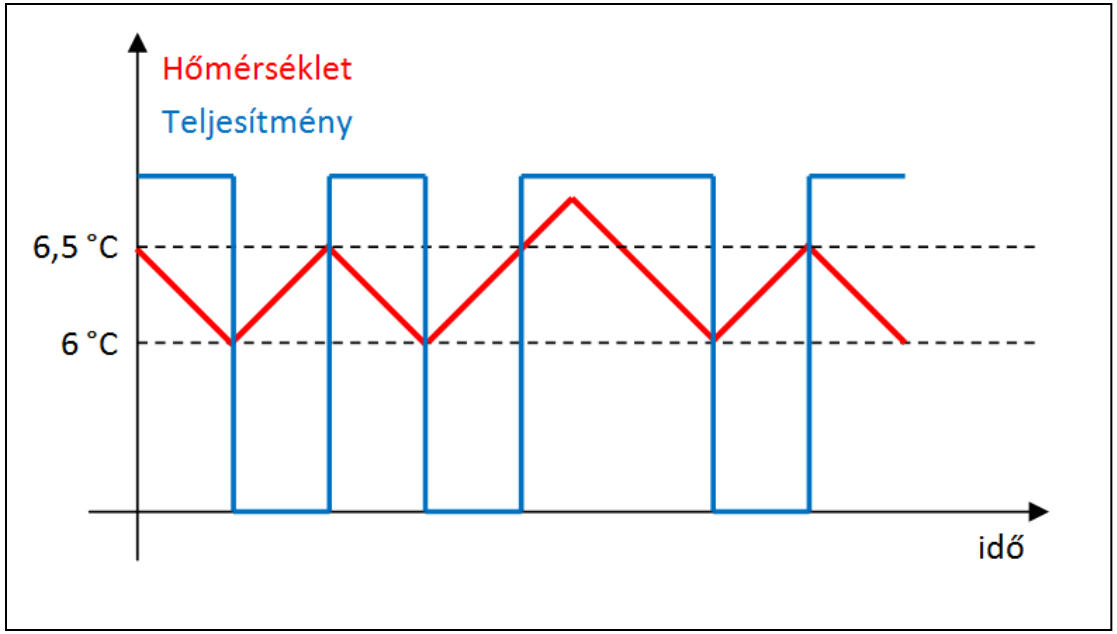
- Példák irányítási rendszerekre:
  - Az emberi testben lejátszódó biokémiai folyamatok
    - Vércukorszint állandó értéken tartása
      - Éhségérzet, evés, táplálék lebontása, raktározás, zsírégetés … stb.
  - Ember által irányított folyamatok
    - Poharat a szánkhoz emeljük
      - Agyunk, mint döntéshozó (szabályozó) szerv, az érzékszerveink (látás, hallás, tapintás stb..) által közvetített információk alapján, az idegpályákon keresztül utasítást küld izmainkhoz, mint beavatkozó szervhez. A beérkező elektromos ingerek izmainkban mechanikai jellé alakulnak át, ezzel megvalósítva az irányítás célját.
    - Felkapcsoljuk a szobában a világítást
      - Hogy világos legyen
    - A jegybank kamatot csökkent vagy emel
      - Az inflációs célkitűzések tartása végett
    - Népességszabályozás Kínában
      - Az 1-nél több gyereket vállaló szülők nem kapnak állami támogatást
  - Önműködő folyamatok (emberi beavatkozás nélkül)
    - WC tartály
      - Hogy legyen mivel leöblíteni
    - Termosztátos olajradiátor
      - Hogy meleg legyen a szobában
    - Időkapcsolós keringető-szivattyú
      - Hogy tiszta legyen a medence vize
    - Utasszállító repülő robotpilótája
      - Hogy komfortos legyen a repülés





Bevezető

- Példák irányítási rendszerekre:
  - Hűtőszekrény
    - A hűtőszekrény hőmérséklet érzékelője „méri” a hőmérsékletét
    - Pl. 6,5°C-nál bekapcsol, 6°C-nál kikapcsol
    - A belső hőmérséklet nem állandó, 6-6,5°C között ingadozik
    - Állandóan nyitva hagyott ajtónál nem képes ellátni a feladatát
    - Állásos szabályozás



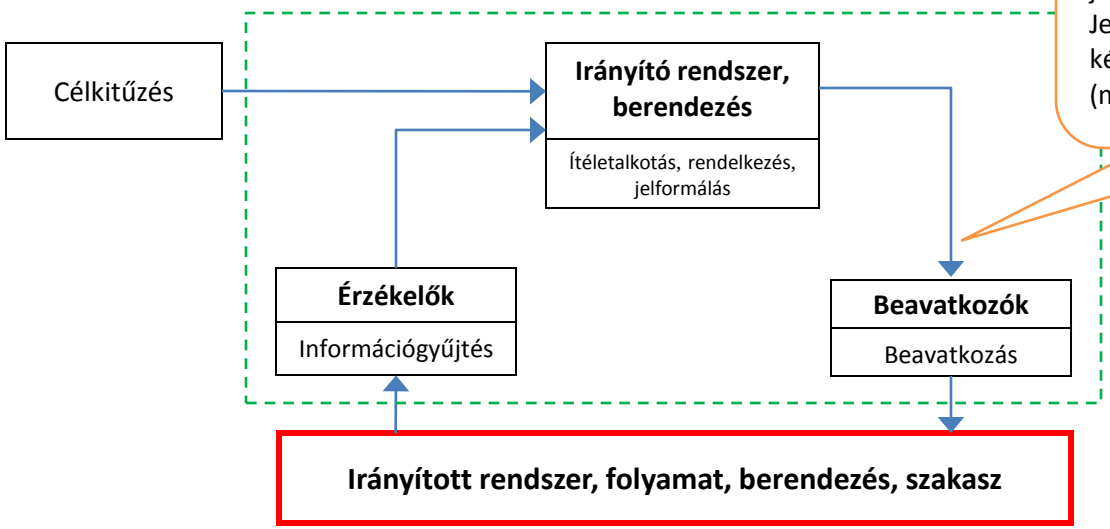
Bevezető

- Példák irányítási rendszerekre
  - Blokkolásgátló (ABS)
    - A kerék túlzott mértékű lassulása esetén az ABS utasítja a szabályzó szelepeket, hogy a blokkolást megelőzendő mérsékeljék a féknyomást. Ettől a kerék gyorsulni kezd.
    - Ha a kerék túlságosan felgyorsul, az ABS növeli a féknyomást
    - Ezt a kört egyes ABS-ek másodpercenként akár 15-20-szor is képesek megtenni.
    - Ennek eredménye
      - A fékek a maximális lassulás közelében tartják a járművet
      - A jármű kormányozható marad

Alapfogalmak

- Az irányítás
  - Olyan művelet, mely valamely folyamatot elindít, fenntart, megváltoztat vagy megállít
  - Az ember részvétele szerint
    - **Kézi**: Az irányítás részműveletei közül egy vagy több emberi közreműködéssel történik.
    - **Önműködő**: Az irányítás emberi beavatkozás nélkül történik.
  - Részműveletei:
    - **Célkitűzés**: Az irányított jellemző állandó értékének vagy időbeni változásának előírása.
    - **Érzékelés**: információ szerzése az irányítás tárgyát képező irányítandó berendezésről, folyamatról
    - **Ítéletalkotás**: döntés az információ feldolgozása alapján a beavatkozás szükségességéről.
    - **Rendelkezés**: utasítás a beavatkozásra
    - **Jelformálás**: A beavatkozás mértékének és időbeli lefolyásának beállítása.
    - **Beavatkozás**: az irányítás tárgyát képező berendezés, folyamat befolyásolása.

A hatáslánc tagjain áthaladó hatásokat „jel”-nek nevezzük. Legfontosabb jellemzője az információ tartalom. Jelhordozó lehet bármely fizikai, kémiai stb. állapothatározó (mennyiség)

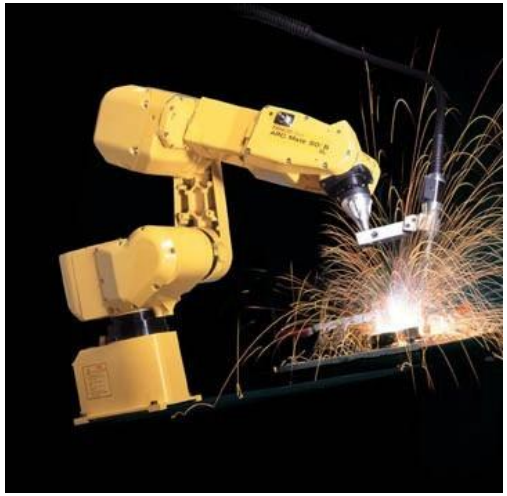


Alapfogalmak

- Célkitűzés: az irányítás célja
  - Az irányítási rendszerrel szemben támasztott követelmények
    - Legyen stabil
    - Az alapjelet megfelelően kövesse, vagyis az alapjeltől való eltérés (a hibajel) legyen minimális. Másképpen fogalmazva, a statikus hiba értéke közelítsen zérushoz.
    - A zavaró jelek hatását minimalizálja.
    - A paraméterváltozásokra kellően érzéketlen legyen.
    - Megfeleljen az egyéb követelményeknek.

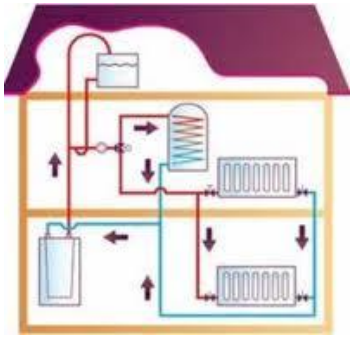
Alapfogalmak

- Célkitűzés: az irányítás célja
  - Az alapjel szerint
    - Értéktartás
      - A rendszer irányított jellemzője a megkívánt állandó értékű legyen
        - » Közvilágítás: este is legyenek viszonylag jó látási viszonyok
        - » Tempomat: az autó haladjon állandó sebességgel
        - » Fűtésrendszer: a lakás hőmérséklete legyen állandó
    - Értékkövetés
      - A rendszer irányított jellemzője a megkívánt időbeni lefutású legyen
        - » Hegesztőrobot: a robot karja kövesse a hegesztési vonalat
        - » Robotrepülő: az adott pályát követve repüljön



Alapfogalmak

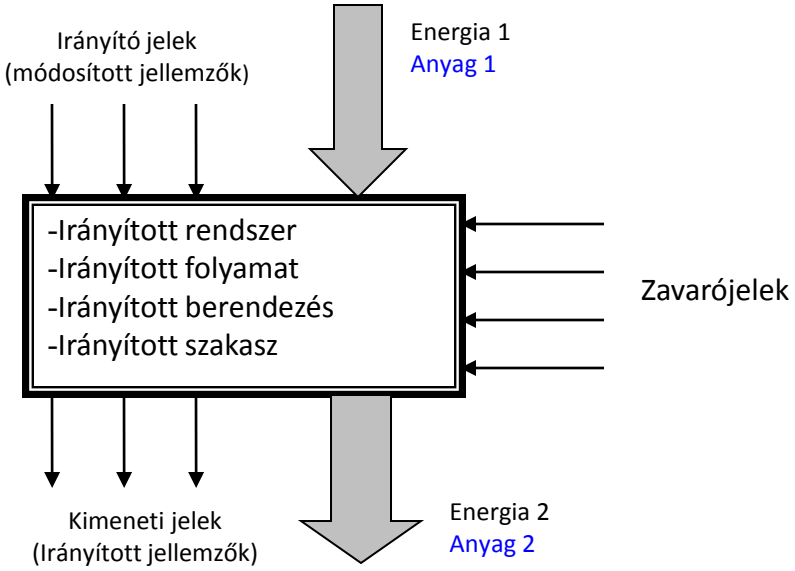
- Irányított rendszer, folyamat, berendezés, szakasz
  - Az irányítás tárgya, amelyet meghatározott célok elérése érdekében befolyásolni kívánunk
    - Irányított jellemző: Az irányított folyamat azon paramétere, amelyet az előírt módon kívánunk befolyásolása.
      - pl. hőmérséklet adott értéken tartása, pozíció időben előírt értékeinek elérése, stb…
    - Módosított jellemző: Az irányított folyamat megváltoztatott jellemzője. Célszerűen ez a paraméter a leginkább alkalmas az irányított jellemző megváltoztatására.
      - pl. hőmérsékletszabályzásnál → fűtőteljesítmény, pozíciószabályozásnál → fordulatszám
    - Zavaró jellemző: Olyan hatások, melyek nincsenek az irányító berendezés felügyelete alatt. Az irányítás egyik fő feladata, hogy a zavaró jellemzők hatását csökkentse vagy megszüntesse.
      - pl. hőmérsékletszabályzás – környezeti hőmérséklet ingadozása



Alapfogalmak

- Irányított rendszer, folyamat, berendezés, szakasz
  - A műszaki, termelési és technológiai folyamatokban rendszerint anyag és/vagy energia átalakulás történik
  - A folyamat jelei:

- Belső jelek (állapot változók)
  - Egymás közötti összefüggéseik írják le a folyamat mozgását
- Bemenő jelek
  - A folyamatot érő külső hatások
  - Irányító jelek, zavaró jelek
- Kimenő jelek
  - A folyamat kívülről megfigyelhető jelei
  - A belső mozgásról nyerhető információk

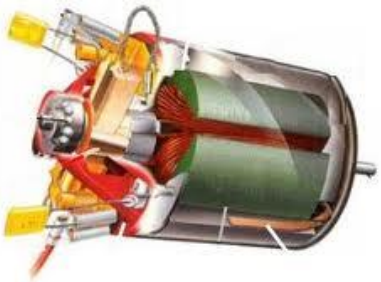


Alapfogalmak

- Érzékelők
  - Feladata: Az érzékelendő fizikai jellemzővel arányos (általában villamos) jel előállítása
    - Hőmérséklet
    - Fordulatszám, szöghelyzet
    - Gyorsulás, sebesség, távolság
    - Nyomás
    - Megvilágítás
    - Áram, feszültség, teljesítmény, mágneses tér
    - Stb…
  - Szabványos analóg vagy digitális kimeneti jel
    - +4...+20mA
    - 0...+10V
    - TTL, CMOS, LVDS…
    - RS422, RS485, USB…

Alapfogalmak

- Beavatkozók
  - Feladatuk az irányított folyamat közvetlen befolyásolása
  - Kapcsolók, relék
  - Szelepek
  - Villamos gépek
  - Pneumatikus, hidraulikus hengerek
  - Fűtőtestek
  - Stb..

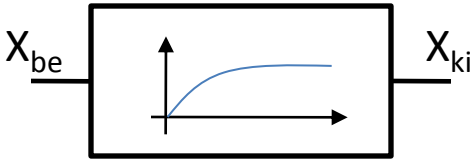


Alapfogalmak

- Irányító rendszer, irányító berendezés
  - Feladata
    - Ítéletalkotás
    - Rendelkezés
    - Jelformálás
    - Rendszerint magában foglalja az érzékelő és beavatkozó szerveket is
      - (Információgyűjtés)
      - (Beavatkozás)
  - Digitális, ritkábban analóg számítógépek
    - PC-k (asztali, beágyazott, ipari…)
    - Beágyazott jelfeldolgozó áramkörök (μC, DSP, FPGA, CPLD)
    - PLC-k (Programmable Logic Controller)

Alapfogalmak

- Tag
  - Az irányítási rendszer tetszés szerint kiválasztott része
  - Jelformáló tulajdonságát leíró összefüggéssel jellemezhető
    - Matematikai modell, jelleggörbe
  - Bemenő jele a tagot működésre késztető külső jel
  - Kimenő jele a tag működése folyamán kialakuló jel



$$X_{be} \quad H(s) = \frac{K_P}{T_I s}\frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{1+T_C s} \quad X_{ki}$$

- Hatásvázlat
  - Az irányítási rendszer elvonatkoztatott ábrázolási módja, amely szemlélteti a rendszer részegységeinek egymásra gyakorolt hatását
  - A hatást közvetítő jeleket vonallal, a hatás irányát a tagokat összekötő nyilakkal szemléltetjük
  - A hatáslánc az irányítási rendszer azon szerkezeti egységeinek sorozata (láncolata), amelyeken a jel azonos hatásirányban halad

Irányítások osztályozása

- Vezérlés
  - Nyílt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző nincs (közvetlen) hatással az irányítási folyamatra, az irányító jel tőle függetlenül alakul ki
- Szabályozás
  - Zárt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző célkitűzéstől való eltérését használjuk fel magának az eltérésnek a csökkentésére, megszüntetésére.

Irányítások osztályozása

- Vezérlés
  - Nyílt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző nincs (közvetlen) hatással az irányítási folyamatra, az irányító jel tőle függetlenül alakul ki

- x_r - rendelkező jel, vezérlési parancs (cél)
- x_b - beavatkozó jel, a beavatkozó szervet működteti
- x_m - módosított jellemző, az irányított szakaszban lejátszódó folyamatot befolyásolja
- x_v - irányított (vezérelt) jellemző

Vezérlés

- Vezérlés
  - Nyílt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző nincs (közvetlen) hatással az irányítási folyamatra, az irányító jel tőle függetlenül alakul ki

- x_r - rendelkező jel, a környezeti megvilágítottság alsó szintje alatt legyen közvilágítás
- x_b - beavatkozó jel, a relét behúzó áram
- x_m - módosított jellemző, a lámpatest feszültsége (be vagy ki)
- x_v - irányított (vezérelt) jellemző, a közvilágítás, a lámpa fénye

Vezérlés

- Vezérlés
  - Nyílt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző nincs (közvetlen) hatással az irányítási folyamatra, az irányító jel tőle függetlenül alakul ki

- x_r - rendelkező jel, pl. 2-es programon mosás, legyen tiszta ruha
- x_b - beavatkozó jel, a programkapcsoló működteti a mosógép automatikáját
- x_m - módosított jellemző, mosási folyamatok paraméterei (idő, hőmérséklet, vízhasználat stb…)
- x_v - irányított (vezérelt) jellemző, a ruha tisztasága

Vezérlés

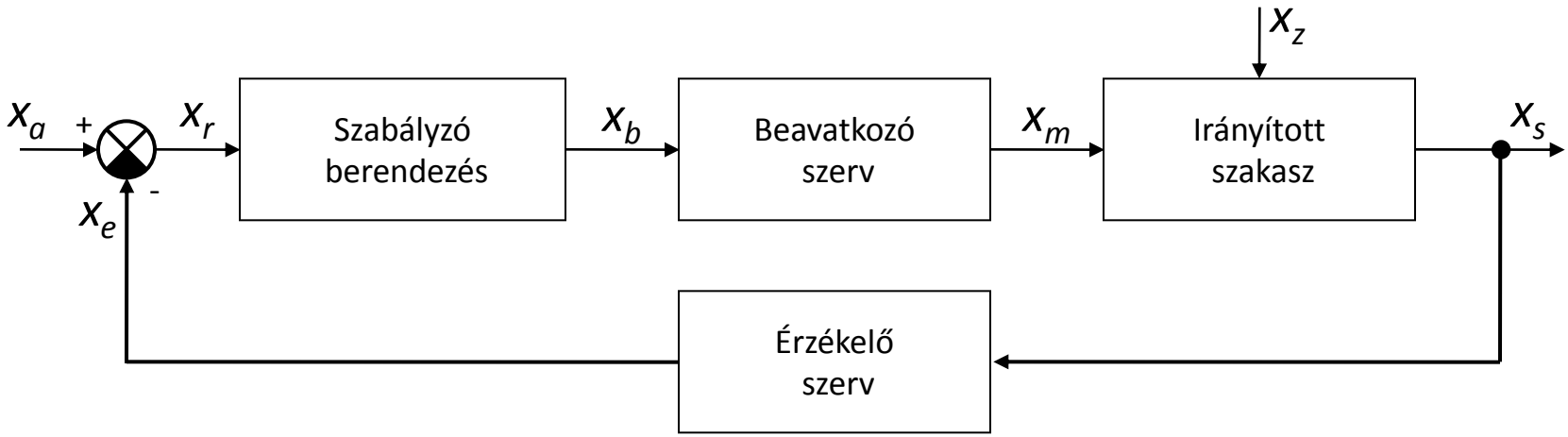
- Vezérlés
  - Nyílt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző nincs (közvetlen) hatással az irányítási folyamatra, az irányító jel tőle függetlenül alakul ki

    - Az utasítás kiadása után a folyamat (valószínűleg) lezajlik
    - Az eredményéről azonban a vezérlő berendezésnek nincs közvetlen visszajelzés
    - Az eredmény nem hat a rendszerre, legfeljebb egy újabb utasítás után
    - A vezérlést úgy kell kialakítani, hogy az irányítási rendszert érő zavaró hatások (x_z) ne befolyásolhassák jelentősen az irányított jellemzőt

  - Az automatizált gyártósorokban rengeteg vezérlés található

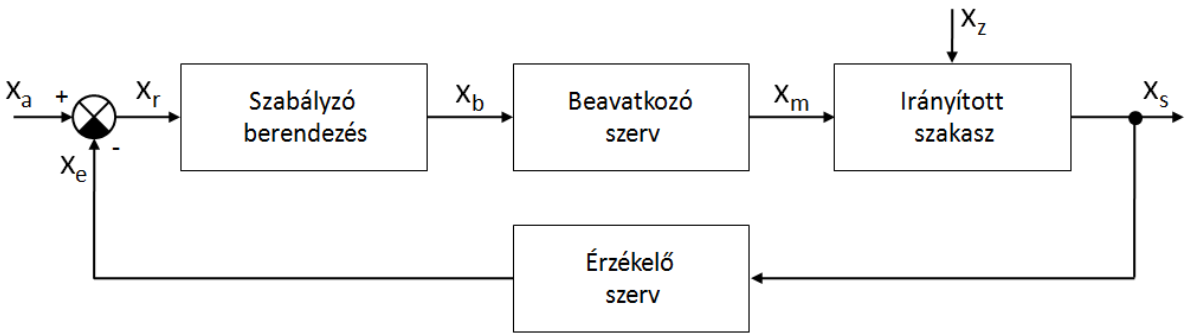
Irányítások osztályozása

- Szabályozás
  - Zárt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző célkitűzéstől való eltérését használjuk fel magának az eltérésnek a csökkentésére, megszüntetésére.
  - Feltétele, az irányított jellemző mérése
  - A rendelkező jelet a célkitűzéstől való eltérés hozza létre

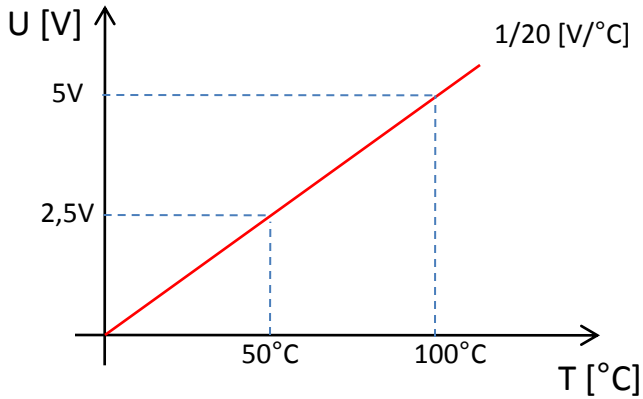


  - x_s : **<u>szabályozott jellemző</u>**
    Annak a fizikai mennyiségnek a pillanatnyi értéke, amit szabályozni szeretnénk
    - Hőmérséklet-szabályozásnál a hőmérséklet, fordulatszám-szabályozásnál a fordulatszám, szintszabályozásnál a folyadékmagasság, feszültség-szabályozásnál a feszültség, stb..
  - $x_{s,a}$: **<u>alapérték</u>**
    A szabályozott jellemző megkívánt értéke (vele azonos fizikai dimenziójú mennyiség). Az alapértékkel fogalmazzuk meg a szabályozásnak a célkitűzését. Általában nem azonos az alapjellel.
    - Pl: hőmérséklet-szabályozásnál: 21 °C hőmérséklet, fordulatszám-szabályozásnál: 1000 ford/perc szögsebesség

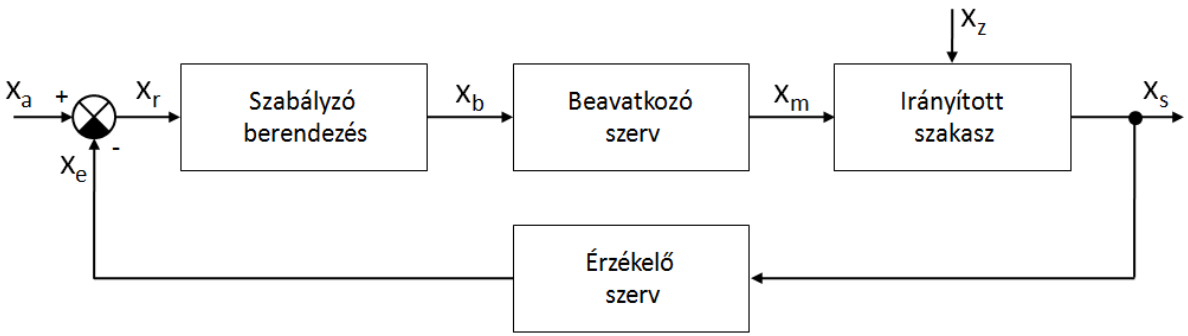
Szabályozás



- x_e : **<u>ellenőrzőjel</u>**
  Az érzékelő szerv kimenő jele. Általában nem ugyanaz a fizikai mennyiség, mint a szabályozott jellemző
  - Az érzékelő a szabályozott jellemző értékét általában (vele arányos) villamos jellé alakítja, adott átviteli tényezővel
  - Pl: hőmérséklet szenzor: 0 – 100 °C hőmérséklet tartományt 0 – 5V kimenő jellel reprezentál, 1/20 [V/°C] átviteli tényezővel
- x_a : **<u>alapjel</u>**
  A szabályozott jellemző kívánt értékét - azaz az alapértéket - ezzel a jellel állítjuk be. Az ellenőrző jellel azonos fizikai dimenziójú, de az alapértékkel általában nem.
  - Pl: előző 0 – 5V kimeneti jelű hőmérséklet szenzornál 2,5V alapjel, 50°C alapértéknek felel meg



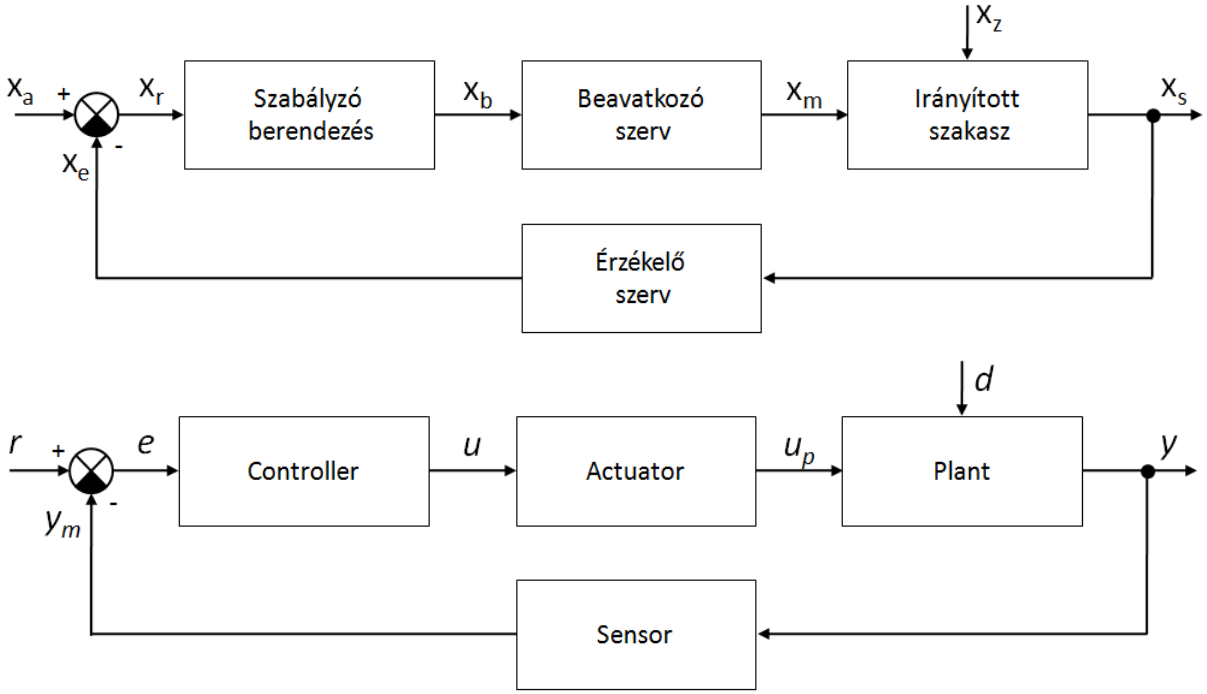
Szabályozás



- x_e : **<u>ellenőrzőjel</u>**
  Az érzékelő szerv kimenő jele. Általában nem ugyanaz a fizikai mennyiség, mint a szabályozott jellemző
  - Az érzékelő a szabályozott jellemző értékét általában (vele arányos) villamos jellé alakítja, adott átviteli tényezővel
  - Pl: hőmérséklet szenzor: 0 – 100 °C hőmérséklet tartományt 0 – 5V kimenő jellel reprezentál, 1/20 [V/°C] átviteli tényezővel
- x_a : **<u>alapjel</u>**
  A szabályozott jellemző kívánt értékét - azaz az alapértéket - ezzel a jellel állítjuk be. Az ellenőrző jellel azonos fizikai dimenziójú, de az alapértékkel általában nem.
  - Pl: előző 0 – 5V kimeneti jelű hőmérséklet szenzornál 2,5V alapjel, 50°C alapértéknek felel meg
- x_r : **<u>rendelkezőjel</u>**
  Az alapjel és az ellenőrzőjel különbsége: $x_r = x_a - x_e$
- x_b : **<u>beavatkozójel</u>**
  A szabályozandó folyamatba beavatkozó szerv működtető jele.
  - Egy pneumatikus munkahengernél a légnyomás, egy elektromos fűtőszálnál a rajta átfolyó áram
- x_m : **<u>módosított jellemző</u>**
  Az a fizikai mennyiség amellyel hatni tudunk a szabályozott jellemzőre, amely leginkább alkalmas a szabályozott jellemző befolyásolására.
  - Pl: hőmérsékletszabályozásnál a fűtő/hűtő-teljesítmény, fordulatszám-szabályozásnál a motor tápfeszültsége stb…
- x_z : **<u>zavaró jellemző(k)</u>**
  Azok a hatások, melyek befolyásolják a szabályozott jellemzőt de nincsenek az irányítóberendezés felügyelete alatt.
  - Pl: hőmérsékletszabályozásnál a környezeti hőmérsékletingadozás, fordulatszám-szabályozásnál a változó motorterhelés

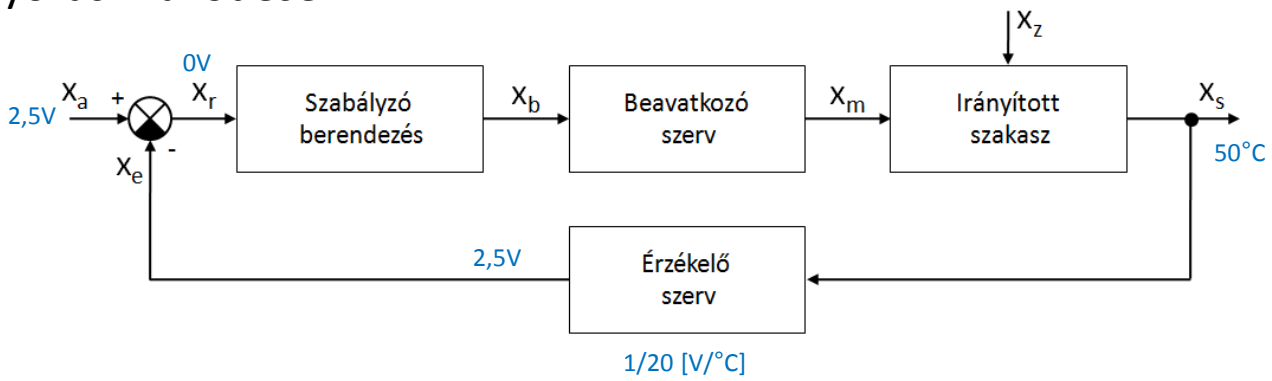
Szabályozás

- Angolszász nyelvterületen a magyar szabványtól eltérő jelöléseket használnak
  - x_s - szabályozott jellemző
  - x_m - módosított jellemző
  - x_z - zavaró jel
  - x_e - ellenőrző jel
  - $x_{s,a}$ - alapérték
  - x_a - alapjel
  - x_r - rendelkező jel
  - x_b - beavatkozó jel



Szabályozás

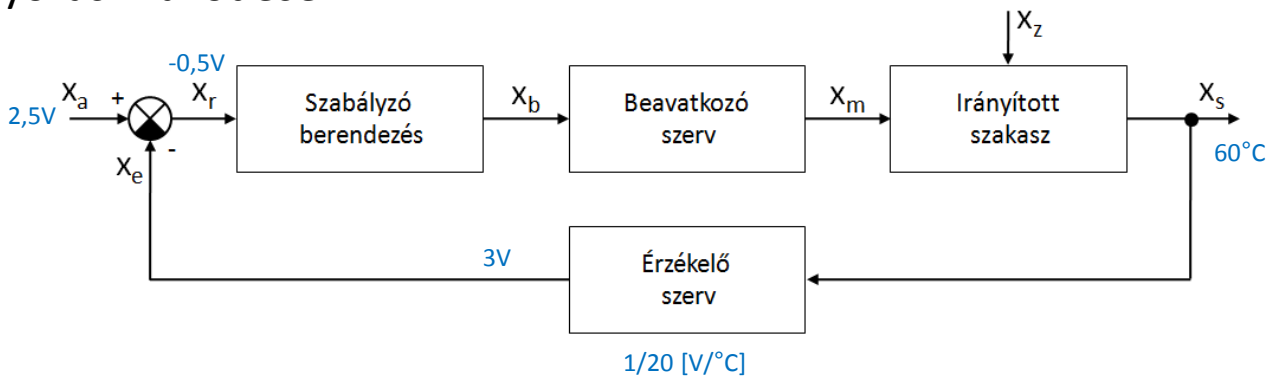
- A szabályozás működése



  - Ha a szabályozott jellemző pontosan megegyezik a célkitűzéssel: $x_s = x_{s,a}$
    - Nem kell a folyamatba beavatkozni, elértük a szabályozási célt (T = 50°C)
    - Az alapjel és az alapérték közti kapcsolatot az érzékelő átviteli tényezője határozza meg

Szabályozás

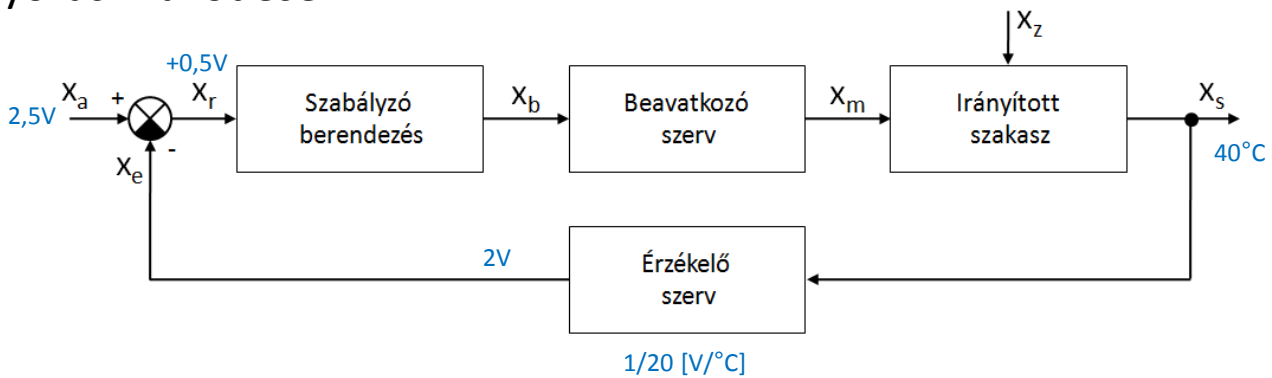
- A szabályozás működése



  - Ha a szabályozott jellemző pontosan megegyezik a célkitűzéssel: $x_s = x_{s,a}$
    - Nem kell a folyamatba beavatkozni, elértük a szabályozási célt (T = 50°C)
    - Az alapjel és az alapérték közti kapcsolatot az érzékelő átviteli tényezője határozza meg
  - Ha a szabályozott jellemző nagyobb az előírt értéknél
    - A rendelkezőjel negatív lesz, jelzi, hogy csökkenteni kell a beavatkozást (csökkenteni kell a fűtőszál áramát)
    - A szabályzó a beavatkozó szerven keresztül csökkenti a beavatkozás mértékét (csökken a fűtőteljesítmény)
    - Csökken a szabályozott jellemző értéke (csökken a hőmérséklet)

Szabályozás

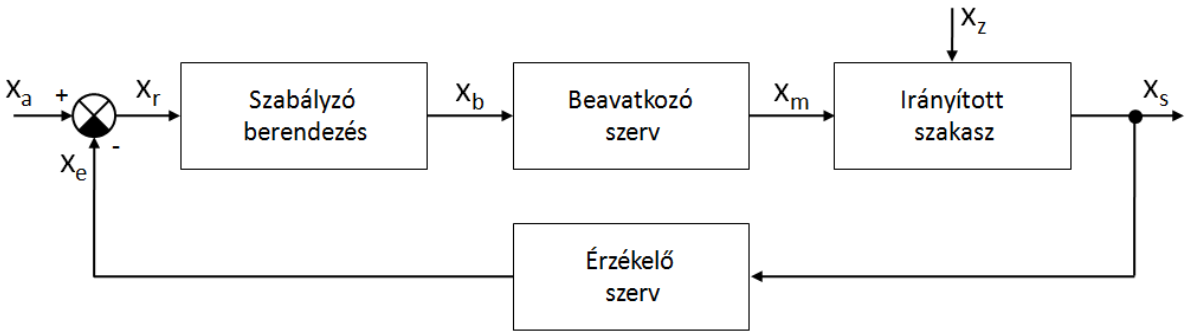
- A szabályozás működése



  - Ha a szabályozott jellemző pontosan megegyezik a célkitűzéssel: $x_s = x_{s,a}$
    - Nem kell a folyamatba beavatkozni, elértük a szabályozási célt (T = 50°C)
    - Az alapjel és az alapérték közti kapcsolatot az érzékelő átviteli tényezője határozza meg
  - Ha a szabályozott jellemző nagyobb az előírt értéknél
    - A rendelkezőjel negatív lesz, jelzi, hogy csökkenteni kell a beavatkozást (csökkenteni kell a fűtőszál áramát)
    - A szabályzó a beavatkozó szerven keresztül csökkenti a beavatkozás mértékét (csökken a fűtőteljesítmény)
    - Csökken a szabályozott jellemző értéke (csökken a hőmérséklet)
  - Ha a szabályozott jellemző kisebb az előírt értéknél
    - A rendelkezőjel pozitívlesz, jelzi, hogy növelni kell a beavatkozást (növelni kell a fűtőszál áramát)
    - A szabályzó a beavatkozó szerven keresztül növeli a beavatkozás mértékét (nő a fűtőteljesítmény)
    - Nő a szabályozott jellemző értéke (nő a hőmérséklet)

Szabályozás

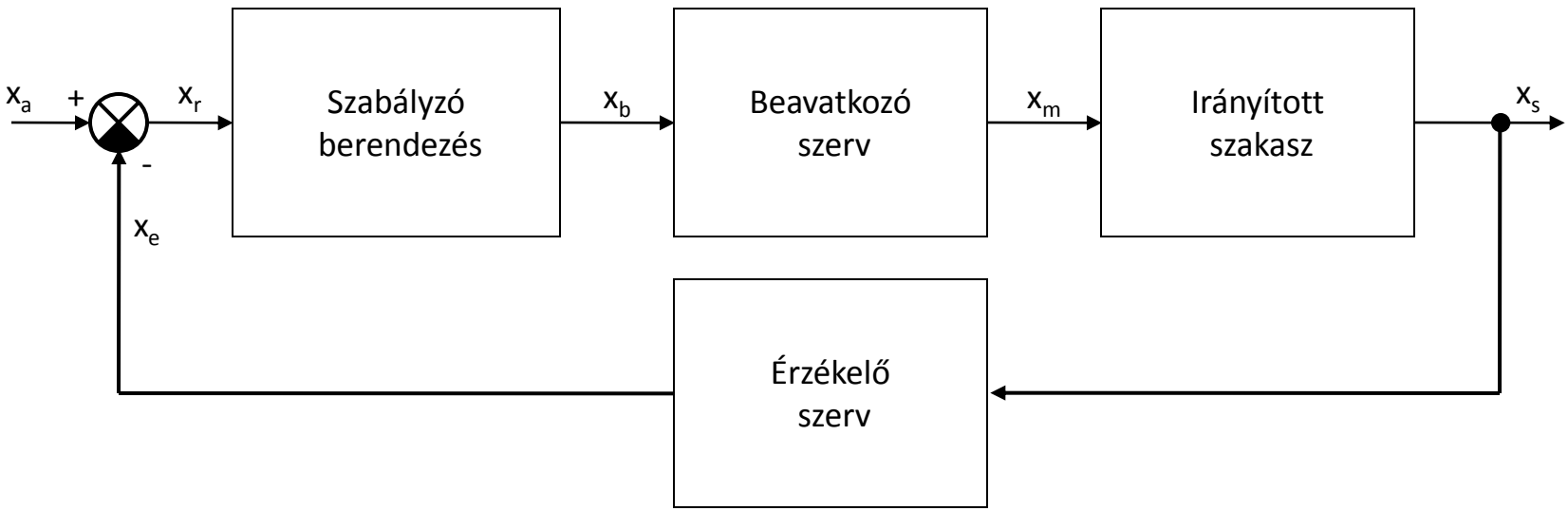
- A szabályozás működése



  - Szabályozásnál a visszacsatolás mindig negatív
  - A rendelkező jelet különbségképzővel állítjuk elő, ha a szabályozási körben minden szerv pozitív működésű vagy páros számú olyan szerv van, amely negatív működésű
    - Ellenkező esetben összeadóval
  - Megjegyzés:
    - Pozitív működésű egy szerv - ha növekvő bemenőjelre növekvő kimenőjellel válaszol.
    - Negatív működésű egy szerv - ha növekvő bemenőjelre csökkenő kimenőjellel válaszol.

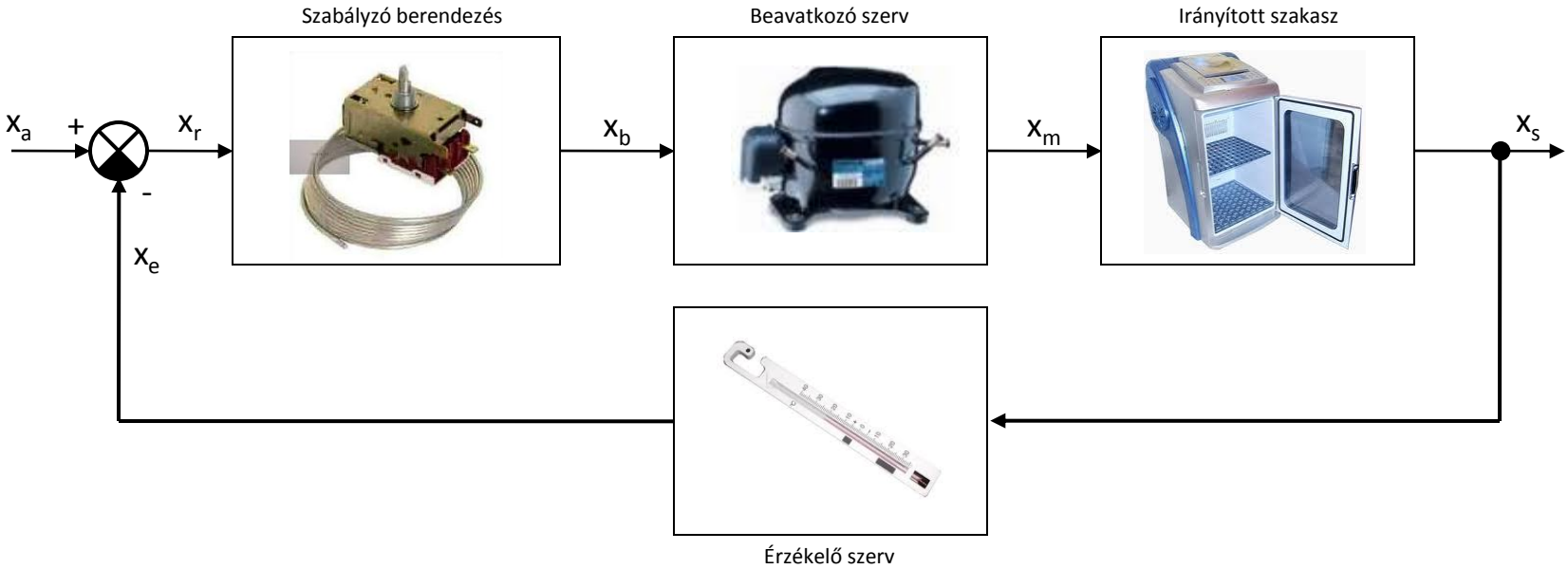
Szabályozás

- Szabályzási példák



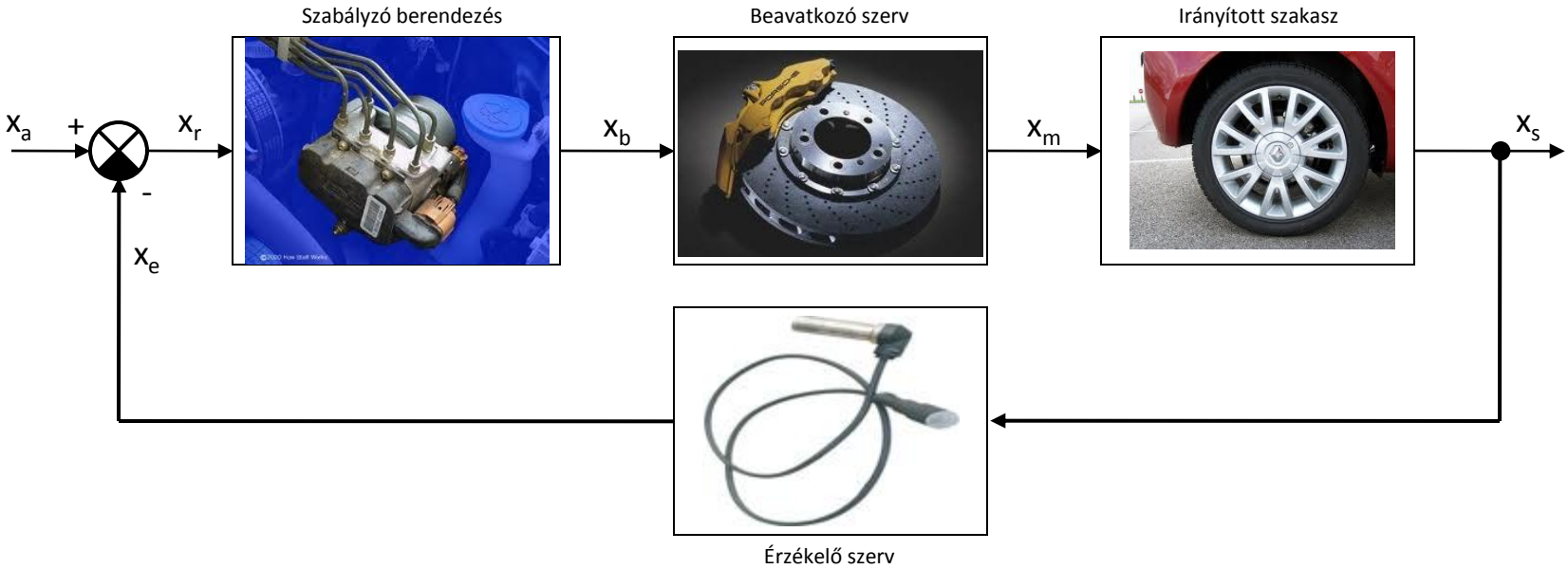
Szabályozás

- Szabályzási példák



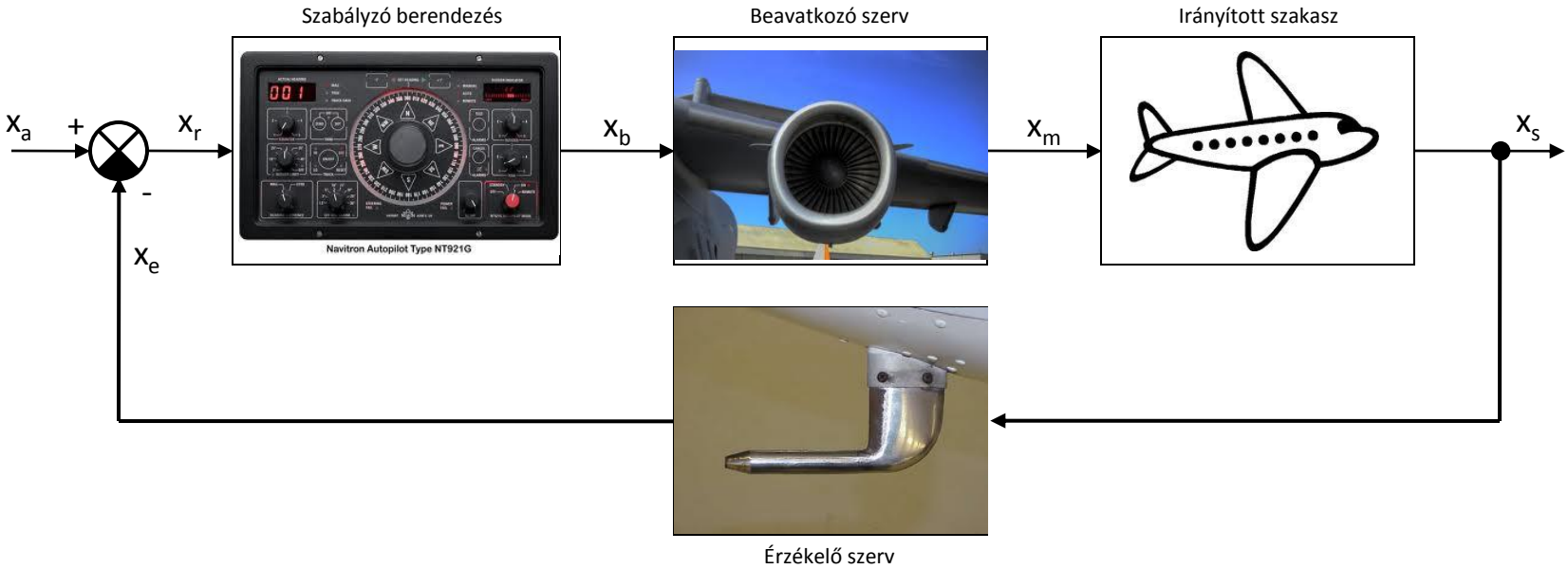
Szabályozás

- Szabályzási példák



Szabályozás

- Szabályzási példák



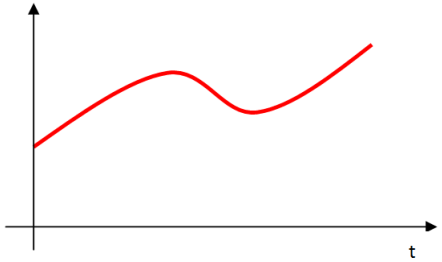
Irányítások osztályozása

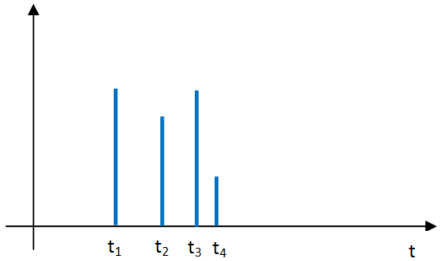
- A szabályozás és vezérlés összehasonlítása
  - A vezérlés hatáslánca nyitott, a vezérlés eredményéről a vezérlő berendezés nem kap visszajelzést, működését kizárólag a rendelkező jel befolyásolja
  - A szabályozási rendszer hatáslánca zárt, a szabályzó berendezést működtető rendelkező jel visszajelzést tartalmaz a megelőző beavatkozás eredményéről. A szabályozás a visszacsatolás elve alapján valósul meg. Ha megváltozik az alapjel, vagy a rendszert zavarás éri hibajel alakul ki. A hibajel hatására olyan beavatkozás történik, ami csökkenti a hibajelet.
  - Vezérléssel csak előre jól ismert zavaró hatások küszöbölhetők ki. Szabályozással lehetőség van minden zavaró jel hatásának kiküszöbölésére.
  - A vezérlés tervezésénél igen pontosan ismerni kell a rendszer jelátviteli tulajdonságait, mivel a beavatkozás hatásáról nincs visszajelzés. Szabályozásnál a visszacsatolás csökkenti a jelátviteli tulajdonságok hatását.
  - Stabil irányított folyamatot feltételezve, a vezérlés mindig stabilisan működik, a zárt szabályozás azonban a visszacsatolás hatására instabillá válhat

- Nagy irányítási rendszerekben túlnyomó részben szabályzásokkal találkozhatunk
  - pl. atomerőművek, olajfinomítók, gyártósorok stb.
- De igen fontos szerepet kapnak a vezérlések is, főleg a rendszerek indítása és leállítása során
  - Bonyolult szekvenciális beavatkozás sorozatot kell elvégezni, jól definiált rendszerállapotokban
  - Ezeket a vezérléseket tipikusan intelligens PLC-kel valósítják meg

Szabályozás

- Szabályozások osztályozása
  - Alapjel szerint
    - Értéktartó szabályozás
      - A cél, a zavaró hatások ellenére a szabályozott jellemző előírt értéken tartása
    - Követő szabályozás
      - A cél, hogy a szabályozott jellemző időben változó jelet kövessen
  - A jelátvivő tagok matematikai modellje szerint
    - Lineáris szabályozás
      - Ha a szabályozási kör minden tagjára érvényes a szuperpozíció elve
    - Nemlineáris szabályozás
      - Ha a szuperpozíció elve a szabályozási kör legalább egy tagjára nem érvényes
  - A jelek időbeni viselkedése szerint
    - Folytonos idejű (analóg)
      - Ha minden jel folyamatos jel
    - Diszkrét idejű (mintavételes)
      - Ha a jelek szaggatottak
  - A jelek értékének meghatározottsága szerint
    - Determinisztikus szabályozás
      - Ha a szabályozási kör minden jele determinisztikus
    - Sztochasztikus szabályozás
      - Ha van legalább egy sztochasztikus jel a szabályozási körben



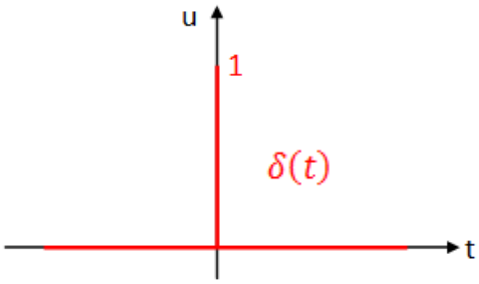


Szabályozás

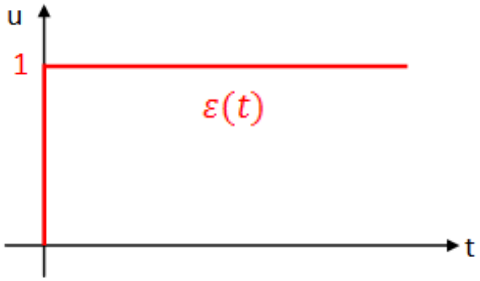
- Szabályozások osztályozása
  - Az alkalmazott szabályozási algoritmus szerint
    - Klasszikus szabályozástechnika, lineáris rendszerek – soros kompenzáció
      - P, PI, PD, PID
    - Modern szabályozástechnika
      - Optimális szabályozások
    - Nemlineáris szabályozások
      - Backstepping, LPV, SDRE…
    - Neurális hálózatok, Fuzzy szabályozások, Genetikus algoritmusok

Szabályozás

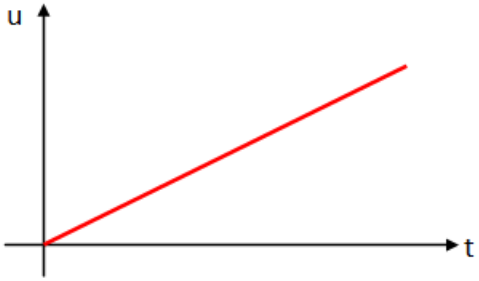
- Szabályozások minőségi jellemzői
  - A szabályozási körben lévő tagok (szakasz, érzékelő, szabályzó) mindegyike jellemezhető valamilyen átviteli tulajdonsággal
    - Megadja, hogyan változik a tag kimeneti jele a tag bemeneti jelének függvényében
      - Pl. A radiátor méretét és a kazán teljesítményét a fűtendő helység méretének függvényében választjuk ki
  - Az átviteli jellemzőket az időtartományban különböző alakú bemenő vizsgálójelekre (gerjesztésekre) adott kimeneti válasz alapján határozzuk meg
  - A tipikus vizsgáló jelek
    - egységimpulzus: $u(t) = 1$ ha $t = 0$; $u(t) = 0$ ha $t \neq 0$ *[Dirac delta]*
    - egységugrás: $u(t) = 0$ ha $t < 0$; $u(t) = 1$ ha $t \geq 0$
    - egység-sebességugrás: $u(t) = 0$ ha $t < 0$; $u(t) = t$ ha $t \geq 0$
    - egység-gyorsulásugrás: $u(t) = 0$ ha $t < 0$; $u(t) = t^2$ ha $t \geq 0$



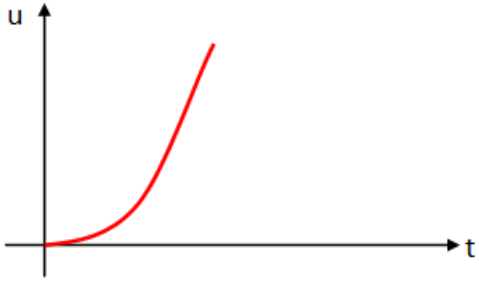
egységimpulzus



egységugrás



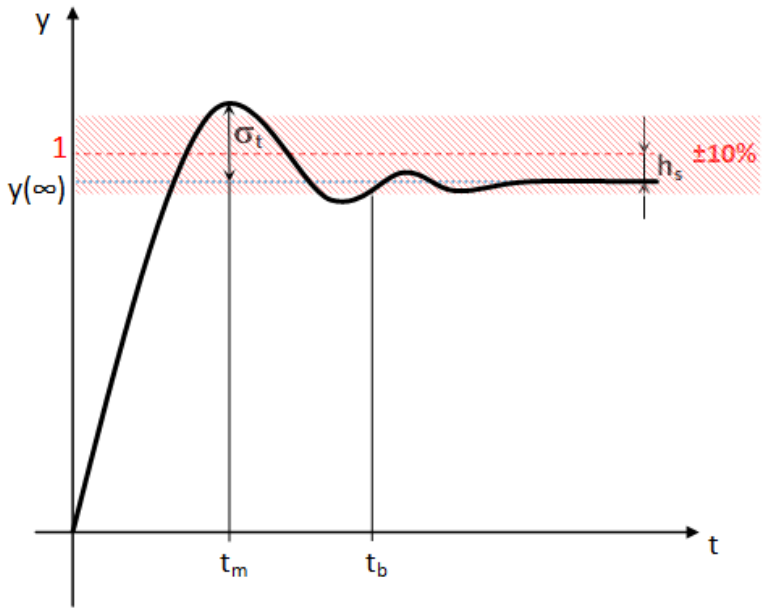
egység-sebességugrás



egység-gyorsulásugrás

Szabályozás

- Szabályozások minőségi jellemzői
  - Az egységugrás gerjesztésre adott válasz (átmeneti függvény) alapján definiálható rendszerjellemzők

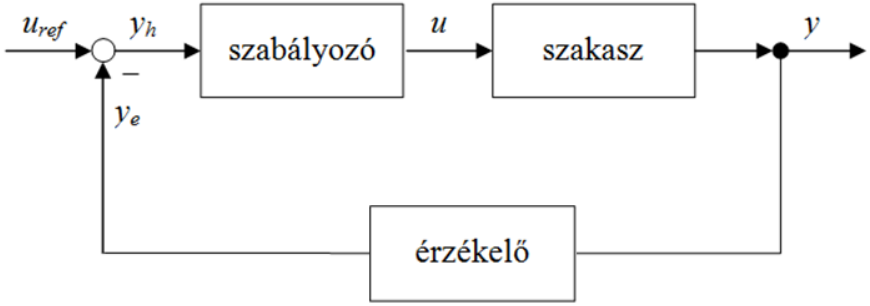


- **Statikus hiba** h_s: az alapjel és a rendszer egyensúlyi állapotában (a lengések lecsengését követően) kialakult kimeneti jelének aránya. Általában az alapjel százalékában megadott érték
- **Túllendülés** σ_t: a kimeneti jel maximális, és állandósult állapotban (t = ∞) kialakult értékének különbsége. Általában az állandósult állapotbeli érték százalékában adott
- **Beállási idő** t_b: az az időpont, ami után a kimeneti jel már nem lép ki a megengedett statikus hiba sávból.
- **Átviteli tényező** K: a kimeneti és bemeneti jel állandósult állapotbeli értékének hányadosa. $K = J_{ki}(t = \infty)/J_{be}$

MC példák

Szabályozás

- Szabályzó rendszerek tervezési lépései
  - A irányítási feladat
    - Hogyan alakítsuk ki a zárt szabályozási rendszert a szakasz matematikai modelljének ismeretében, hogy az megfeleljen az előzetesen megfogalmazott elvárásoknak



    - u = ?
    - Keressük a megfelelő visszacsatolási utasítást, a megfelelő szabályzót
      - Különböző szabályzótervezési eljárások
    - A visszacsatolt szabályozási rendszer minőségi jellemzőit rendszeranalízissel ellenőrizzük
      - Vizsgáló jelekkel gerjesztjük a rendszer bemeneteit, figyeljük a választ
    - A valós rendszeren nem mindig lehetséges a próbálgatás, vagy nem célszerű
  - Modellalapú tervezés
    - A rendszer modelljének ismeretében matematikai módszerekkel analizáljuk és tervezzük a szabályozási rendszert

Szabályozás

- Szabályzó rendszerek tervezési lépései
  - A szabályozott szakasz, folyamat definíciója, elvárások, célok megfogalmazása
  - A folyamat analízise, jeleinek vizsgálata, zajviszonyok felderítése
  - Beavatkozó szervek megválasztása
    - Teljesítmény, szükséges felbontás, pontosság figyelembe vételével
  - Szabályozási algoritmus megválasztása (PID, LQG, Nemlineáris, Fuzzy…)
    - Az elvárások, a rendszer, a mintavételi idő stb. figyelembe vételével
  - A szabályzó hardver megvalósítása, élesztése
  - Tesztelés, adatgyűjtés a folyamaton
  - A folyamat identifikációja, matematika modelljének meghatározása
  - A szabályozási algoritmus kifejlesztése
  - A szabályozási algoritmus implementálása
  - A szabályozási rendszer végső tesztelése

Folyamatok matematikai modellje

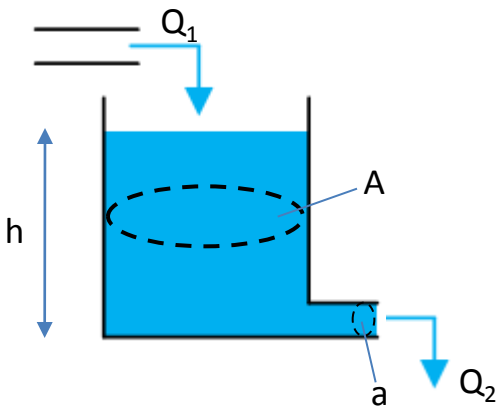
- Az irányítandó folyamatot a vizsgálatokban, tervezésnél valamilyen modellel reprezentáljuk
  - Megfelelően „utánozza” a valóságban lejátszódó eseményeket
    - Elegendő pontossággal
    - Az irányítás szempontjából nem lényeges hatásokat legtöbbször elhanyagoljuk
    - El kell dönteni mit kell feltétlenül figyelembe venni, mit lehet elhanyagolni
      - Pl. a relativisztikus hatásokat az ABS tervezésekor nem kell figyelembe venni, a GPS műholdak atomóráinak összehangolásánál azonban igen
      - Egy autós utazás megtervezésekor nem kell számolni a föld forgásával, egy űrrepülőgép útjának tervezésekor azonban kell
  - Leírja a belső, a bemenő és a kimenő jelek közötti összefüggéseket
  - A modell mindig csak egyszerűsített mása a valóságnak
  - Ha matematikai kifejezésekkel adjuk meg, matematikai modellről beszélünk
    - A modell megalkotásában az alaptudományok segítenek
      - Newton törvények, villamosságtan törvényei, kémiai reakciók törvényszerűségei stb.
    - A modell paramétereket a folyamaton végzett mérésekkel határozzuk meg (identifikáció)
      - Bemenő és kimenő jelek megfigyelése, feldolgozása

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - A mérnöki és informatikusi munka területein gyakoriak a dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Ezek a folyamatok tehetetlenségük folytán nem tudják azonnal követni az őket érő hatásokat
    - A tehetetlenség valamilyen tároló hatás következménye
    - A tároló elem tartalmát a bemenő jelek csak véges idő alatt tudják megváltoztatni
      - Adott időpontban a tároló elem tartalma nem a bemenő jelek ugyanezen időpontbeli értékétől függ, hanem korábbi események során alakult ki
    - A fizikai rendszerekben ez energiatárolásként jelenik meg
      - Mozgási energia, helyzeti energia, villamos töltés, mágneses fluxus
      - Pl. a kondenzátor feszültsége, a tekercs árama nem változhat ugrásszerűen
      - Egy test mozgási energiája csak végtelen nagy gyorsulással változtatható meg ugrásszerűen
  - Adott pillanatban a rendszer mozgását a bemenő jelek és a rendszer előélete együttesen határozzák meg
    - A tároló elemek a rendszer múltjából megőrzött információkat hordozzák
    - A tárolók tartalma egyértelműen jellemzi a rendszer állapotát
    - A bemenő jelek aktuális értékének hatása a rendszer állapotában csak később jut érvényre

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Víztartály példa
    - **Q_1**: a beömlő vízmennyiség [m^3/s]
    - **Q_2**: a kiömlő vízmennyiség [m^3/s]
    - **h**: a vízoszlop magassága [m]
    - **A**: a tartály keresztmetszete [m^2]
    - **a**: a kiömlő nyílás keresztmetszete [m^2]
    - **v**: a kiömlő víz sebessége
    - **μ**: a folyadékra és a kiömlő nyílásra jellemző állandó



  - A tartályból kiömlő vízmennyiség függ a víz sebességétől és a kiömlő nyílás keresztmetszetétől
  - A kiömlő víz sebessége függ a tartályban lévő folyadék magasságától
  - A tartályban lévő víz térfogatváltozása egyenlő a beömlő és kiömlő vízmennyiség különbségével

$$Q_2 = \mu a v$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \longrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$Q_2 = \mu a \sqrt{2g}\sqrt{h}$$

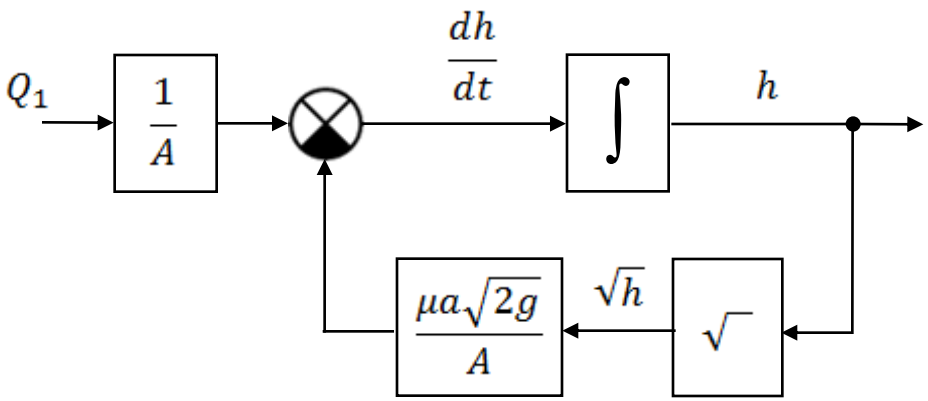
$$Q_1 - Q_2 = A\frac{dh}{dt}$$

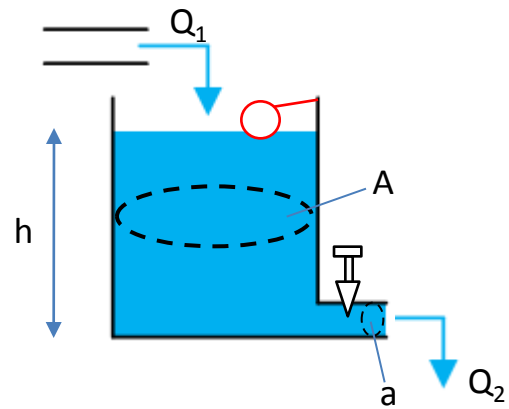
$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 - Q_2}{A} = \frac{1}{A}Q_1 - \frac{\mu a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h}$$

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Víztartály példa

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} Q_1 - \frac{\mu a \sqrt{2g}}{A} \sqrt{h}$$



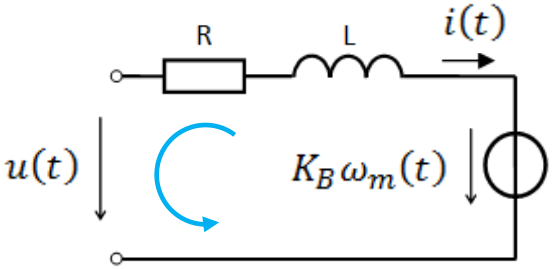


- Bemenő jel (irányító jel): **Q_1** beömlő vízmennyiség
- Belső változó (állapotváltozó): **h** vízszint
  - Egyben kimeneti jel is
- Az irányítás célja: állandó **h** vízszint
  - Szintmérővel mérjük
- Zavaró jel a változó vízfogyasztás
  - Egy csappal változtathatjuk **a** értékét

Feladat: **Q_1**(t) = ?

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Egyenáramú (DC) motor
    - Bemenő jelek
      - Kapocsfeszültség, Terhelő nyomaték
    - Kimenő jelek
      - Motor árama, Szögsebesség
    - Zavaró jel
      - Terhelő nyomaték



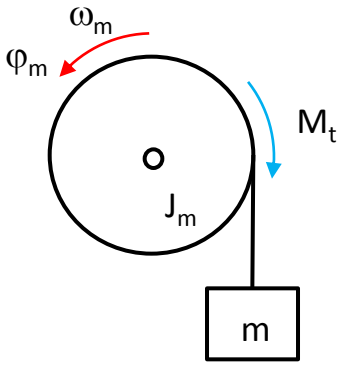
- Elektromechanikai rendszer
  - u(t) : a motor kapocsfeszültsége [V]
  - i(t) : a motor tekercsein átfolyó áram [A]
  - ω_m(t): a forgórész szögsebessége [rad/s]
  - R : a motor tekercselési ellenállása [W]
  - L : a motor induktivitása [H]
  - K_b : feszültségtényező [V/(rad/s)]
  - Kirchoff-törvény

$$0 = u(t) - i(t)R - \frac{d\,i(t)}{dt}L - K_B\omega_m(t)$$

$$\frac{d\,i(t)}{dt} = \frac{1}{L}u(t) - \frac{R}{L}i(t) - \frac{K_B}{L}\omega_m(t)$$

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Egyenáramú (DC) motor
    - Bemenő jelek
      - Kapocsfeszültség, Terhelő nyomaték
    - Kimenő jelek
      - Motor árama, Szögsebesség
    - Zavaró jel
      - Terhelő nyomaték



- Elektromechanikai rendszer
  - K_T : nyomatéktényező [Nm/A]
  - J_m : a fogórész és terhelések tehetetlenségi nyomatéka [Nm/(rad/s²)]
  - B : a mechanikai veszteségek együtthatója [Nm/(rad/s)]
  - M_t: a mechanika terhelő nyomaték [Nm]
  - Nyomatékegyenlet

$$K_T i(t) = \frac{d\omega_m(t)}{dt} J_m + B\omega_m(t) + M_t$$

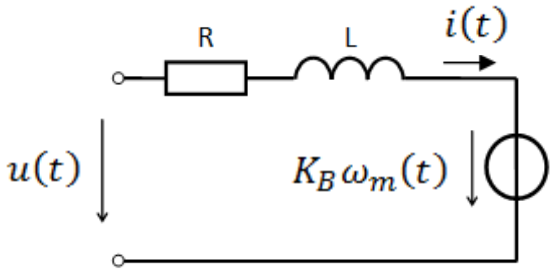
$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{K_T}{J_m} i(t) - \frac{B}{J_m}\omega_m(t) - \frac{1}{J_m} M_t$$

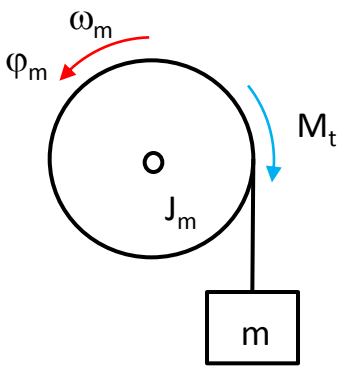
Folyamatok matematikai modellje

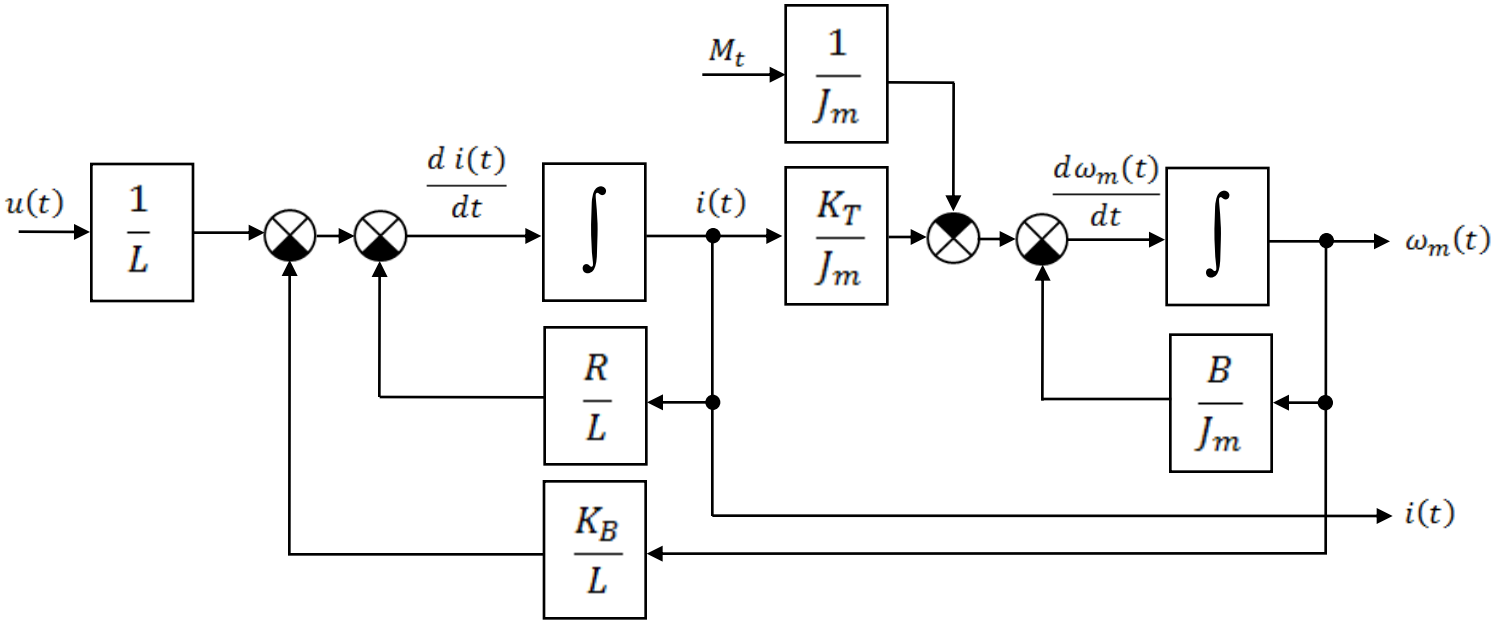
- Dinamikus rendszerek
  - Egyenáramú (DC) motor

$$\frac{d\,i(t)}{dt} = \frac{1}{L}u(t) - \frac{R}{L}i(t) - \frac{K_B}{L}\omega_m(t)$$

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{K_T}{J_m}i(t) - \frac{B}{J_m}\omega_m(t) - \frac{1}{J_m}M_t$$







Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Dinamikus rendszerek matematikai modelljét differenciál egyenletek formájában szokták megadni, melyek az állapotváltozók és a kimenetek állapotváltozóktól, a bemenetektől és az időtől való függését írják le
    - Állapotegyenlet és kimeneti egyenlet – időtartománybeli leírás

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{dx}{dt}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}$$

- **x**: az állapotváltozók vektora
- **u**: a bemenetek vektora
- **y**: a kimenetek vektora
- **f**(**x**,**u**,*t*): az állapotváltozók függését leíró függvény
  - Általánosságban nemlineáris függvény
- **h**(**x**,**u**,*t*): az kimenetek függését leíró függvény
  - Általánosságban nemlineáris függvény

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Ha **f** és **g** függvények nem függenek az időtől, autonóm rendszerről beszélünk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

  - Ha **f** és **g** függvények lineáris függvények, időben változó lineáris rendszerről beszélünk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}$$

  - Ha **f** és **g** függvények időtől nem függő lineáris függvények, lineáris időinvariáns rendszerről beszélünk

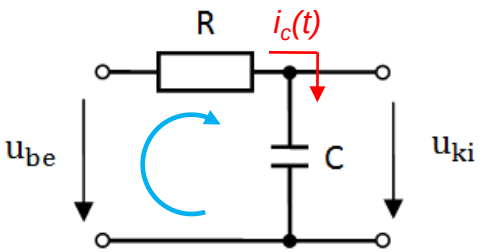
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

    - A, B, C, D mátrixok a rendszer paramétermátrixai

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Példarendszerek matematikai modellje állapotegyenlettel

$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}u_C(t)$$



- <u>Terheletlen RC kör (SISO rendszer)</u> Single Input Single Output

$$-u_{be}(t) + u_C(t) + Ri_C(t) = 0$$

$$-u_{be}(t) + u_C(t) + RC\frac{d}{dt}u_C(t) = 0$$

$$RC\frac{d}{dt}u_C(t) = u_C(t) - u_{be}(t)$$

$$\frac{d}{dt}u_C(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_{be}(t)$$

$$x \leftarrow u_C(t)$$

$$u \leftarrow u_{be}(t)$$

$$y \leftarrow u_C(t)$$

- Lineáris időinvariáns rendszer

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u$$

$$y = x$$

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Példarendszerek matematikai modellje állapotegyenlettel
    - <u>DC motor (MIMO rendszer)</u> **M**ulti **I**nput **M**ulti **O**utput

$$\frac{d\,i(t)}{dt} = \frac{1}{L}u(t) - \frac{R}{L}i(t) - \frac{K_B}{L}\omega_m(t)$$

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{K_T}{J_m}i(t) - \frac{B}{J_m}\omega_m(t) - \frac{1}{J_m}M_t$$

$$x_1 \leftarrow i(t) \qquad u_1 \leftarrow u(t)$$

$$x_2 \leftarrow \omega_m(t) \qquad u_2 \leftarrow M_t(t)$$

- Lineáris időinvariáns rendszer

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 - \frac{K_B}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_T}{J_m}x_1 - \frac{\mathrm{B}}{J_m}x_2 - \frac{1}{J_m}u_2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}}$$

- Az egyenletek mátrixos formában

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & -\frac{\mathrm{B}}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Folyamatok matematikai modellje

- Dinamikus rendszerek
  - Példarendszerek matematikai modellje állapotegyenlettel
    - <u>Víztartály</u>

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}Q_1 - \frac{\mu a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h}$$

$$x \longleftarrow h$$
$$u \longleftarrow Q_1$$

    - Nemlineáris autonóm rendszer

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = g(x,u)$$

$$\dot{x} = -\frac{\mu a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{x} + \frac{1}{A}u$$
$$y = x$$

- Nemlineáris rendszerek kezelése
  - Munkaponti linearizálás
  - Visszacsatolásos linearizálás
  - Nemlineáris szabályozások
    - Backstepping
    - LPV, MBPC
    - SDRE stb.

  - Pl. munkaponti linearizálás Taylor-sor
    - A munkapont körüli kis megváltozásokra

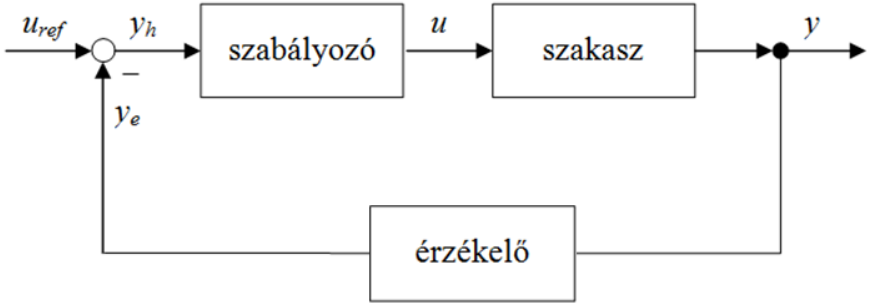
$$f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \Delta x$$

$$\sqrt{h} \approx \sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}}\Delta h$$

    - „A modell csak közelíti a valóságot”

Szabályozás

- Szabályzó rendszerek tervezési lépései
  - A irányítási feladat
    - Hogyan alakítsuk ki a zárt szabályozási rendszert a szakasz matematikai modelljének ismeretében, hogy az megfeleljen az előzetesen megfogalmazott elvárásoknak



    - u = ?
    - Keressük a megfelelő visszacsatolási utasítást, a megfelelő szabályzót
      - Különböző szabályzótervezési eljárások
    - A visszacsatolt szabályozási rendszer minőségi jellemzőit rendszeranalízissel határozzuk meg
      - Vizsgáló jelekkel gerjesztjük a rendszer bemeneteit, figyeljük a választ
    - A valós rendszeren nem mindig lehetséges a próbálgatás, vagy nem célszerű
  - Modellalapú tervezés
    - A rendszer modelljének ismeretében matematikai módszerekkel analizáljuk és tervezzük a szabályozási rendszert

Matematikai alapok

- Mátrixok
  - Vektorok
    - Sorvektor, oszlopvektor

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

  - Mátrix

$$\underset{(n,m)}{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2+j3 \\ 1-j1 & -4 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}$$

  - Mátrix transzponáltja

$$\underset{(n,m)}{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Matematikai alapok

- Mátrixok
  - Speciális mátrixok
    - Diagonális mátrix, egységmátrix, zérusmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Összeadás

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A + B = B + A$$

$$A + 0 = A$$

Matematikai alapok

- Mátrixok
  - Mátrix szorzása mátrixszal

$$\underset{(n,m)}{\mathrm{A}} \cdot \underset{(m,p)}{\mathrm{B}} = \underset{(n,p)}{\mathrm{C}} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \qquad i = 1, \dots, n \qquad j = 1, \dots, p$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot -5 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ -2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 4 \cdot -5 & -2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 12 + 0 \cdot -5 & 4 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 16 \\ -4 & -22 & 16 \\ 8 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

- Tulajdonságok

$$AB \neq BA$$

$$A0 = 0A = 0$$

$$AI = IA = A$$

Matematikai alapok

- Mátrixok
  - Négyzetes mátrix determinánsa

$$|A| = det[a_{11}] = a_{11}$$

$$|A| = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A| = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

  - Négyzetes mátrix adjungáltja
    - Az A mátrix a_{ij} elemeihez tartozó előjeles aldeterminásokból álló mátrix transzponáltja

Matematikai alapok

- Mátrixok
  - Négyzetes mátrix determinánsa

$$|A| = det[a_{11}] = a_{11}$$

$$|A| = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A| = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

  - Négyzetes mátrix adjungáltja
    - Az A mátrix a_{ij} elemeihez tartozó előjeles aldeterminásokból álló mátrix transzponáltja

$$adjA = adj\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Matematikai alapok

- Mátrixok
  - Négyzetes mátrix determinánsa

$$|A| = det[a_{11}] = a_{11}$$

$$|A| = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A| = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \ a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

  - Négyzetes mátrix adjungáltja
    - 2x2-es mátrix adjungáltja

$$adjA = adj\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matematikai alapok

- Mátrixok
  - Négyzetes mátrix inverze

$$AA^{-1} = I \qquad A^{-1}A = I$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$$

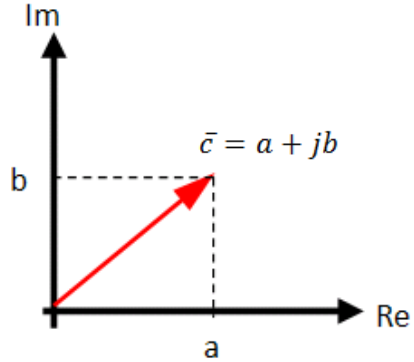
  - Hasznos azonosságok

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$|AB| = |A||B|$$

Matematikai alapok

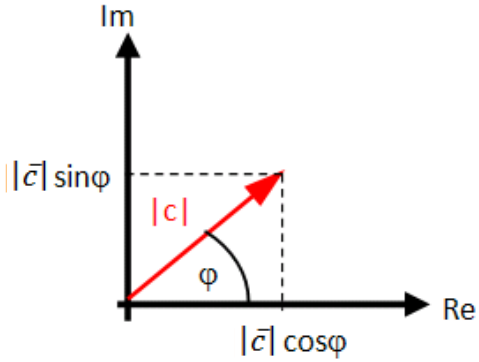
- Komplex számok
  - Valós rész $Re\{\bar{c}\} = a$
  - Képzetes rész $Im\{\bar{c}\} = b$
  - Síkvektorként ábrázolható



$$\bar{c} = a + jb$$

$$j = \sqrt{-1}$$

  - Polár koordináta rendszer



- Komplex konjugált

$$\bar{c}^* = a - jb$$

- Abszolút érték

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c} \cdot \bar{c}^*}$$

$$|\bar{c}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)}$$

- Euler formula

$$\bar{c} = |\bar{c}|(cos\varphi + jsin\varphi) = |\bar{c}|e^{j\varphi}$$

  - Amplitúdó, fázisszög
  - Adott frekvenciájú szinuszos jel ezzel a két paraméterrel jellemezhető

Matematikai alapok

- Komplex számok
  - Szinuszos jelek általános ábrázolása — Komplex számmal (komplex amplitúdó)

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \rightleftarrows \quad A - jB$$

$$f(t) = M\cos(\omega t + \varphi) \quad \rightleftarrows \quad Me^{-j\varphi}$$

- Adott frekvenciájú szinuszos jel két paraméterrel jellemezhető
  - A jel szinuszos és koszinuszos összetevőjének amplitúdójával: A, B
  - A jel amplitúdójával és fázisával: M, φ
- Nem egyenlőségről van szó, csak megfeleltetés, reprezentálás komplex számmal
  - Csak adott frekvencián értelmezhető a megfeleltetés
  - Pl. (1+1j)+(2+2j) = (3+3j)
    - » Mindhárom komplex szám azonos frekvenciájú jeleket reprezentál
    - » Csak amplitúdójuk és fázisuk más
- Az előjel váltás a komplex Fourier transzformáció definíciója miatt szokás (később)
  - Pl:

$$f(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 2{,}1213\cos(\omega t) - 2{,}1213\sin(\omega t)$$

$$\Updownarrow$$

$$2{,}1213 + j2{,}1213 = 3e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Matematikai alapok

- Komplex számok
  - Lineáris rendszerek
    - Érvényes a szuperpozíció elve
    - Szinuszos jellel gerjesztve a bemenetet a kimenet is szinuszos
      - azonos frekvenciával
      - az amplitúdó és fázis változhat
    - Pl:
      - Egy lineáris rendszer bemenő jele $J_{be}(t) = 3cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$
      - Ennek hatására kimeneti jele $J_{ki}(t) = 1{,}5cos\left(\omega t - \frac{\pi}{8}\right)$
      - A komplex amplitúdók segítségével adott ω frekvencián jellemezhető a rendszer átviteli tulajdonsága

$$\bar{J}_{be} = 3e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\bar{J}_{ki} = 1{,}5e^{j\frac{\pi}{8}}$$

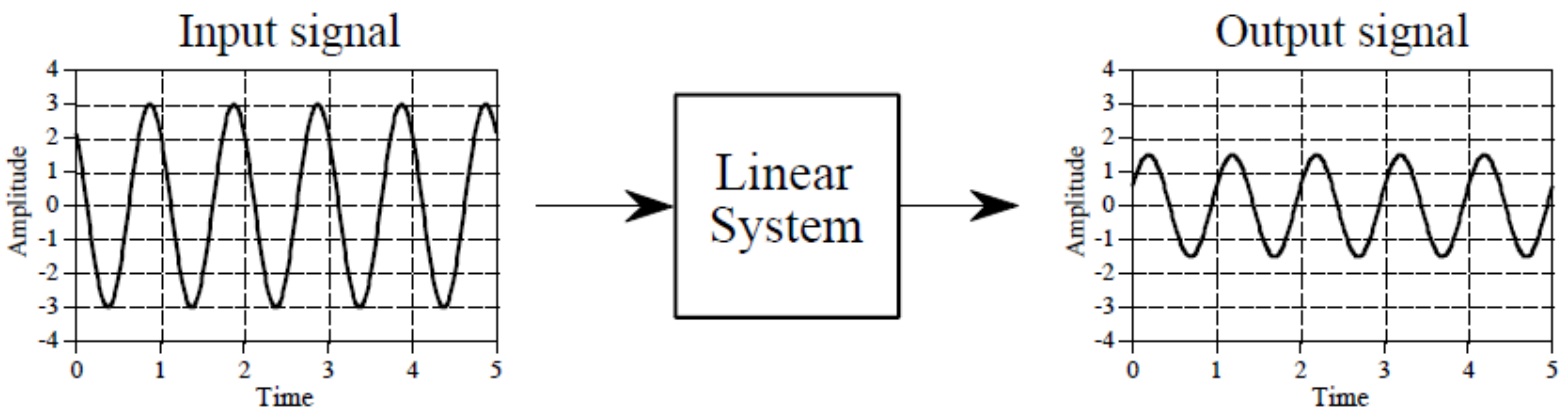
$$\bar{W} = \frac{\bar{J}_{ki}}{\bar{J}_{be}} = \frac{1{,}5e^{j\frac{\pi}{8}}}{3e^{-j\frac{\pi}{4}}} = 0{,}5e^{j\frac{3\pi}{8}}$$

      - Adott frekvencián a rendszer amplitúdó átvitele 0,5 fázis tolása 3π/8

$$\bar{J}_{ki} = \bar{W} \cdot \bar{J}_{be}$$

Matematikai alapok

- Komplex számok
  - Lineáris rendszerek



Conventional

$3\cos(\omega t + \pi/4)$

or

$2.1213\cos(\omega t) - 2.1213\sin(\omega t)$

$1.5\cos(\omega t - \pi/8)$

or

$1.3858\cos(\omega t) + 0.5740\sin(\omega t)$

Complex representation

$3e^{-j\pi/4}$

or

$2.1213 + j2.1213$

$\times$

$0.5e^{j3\pi/8}$

or

$0.1913 - j0.4619$

$=$

$1.5e^{j\pi/8}$

or

$1.3858 - j0.5740$

Matematikai alapok

- Fourier transzformáció
  - Periodikus jel Fourier transzformáltja
    - Bármely T_s periódusidejű periodikus jel felbontható megszámlálhatóan végtelen sok diszkrét frekvenciájú szinuszos és koszinuszos függvény összegére (Fourier-sor)

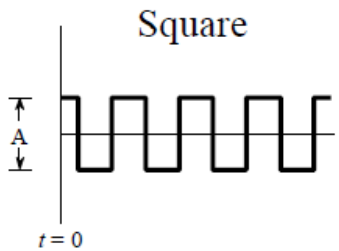
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

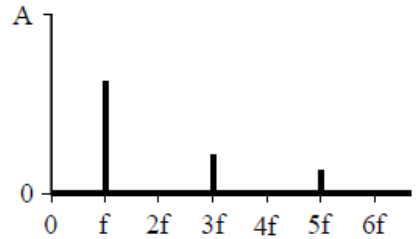
  - Ahol az alapharmonikus frekvencia és körfrekvencia $f_0 = \frac{1}{T_0}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_s}$
  - Az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\, dt \qquad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt \qquad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t)\, dt$$

  - Az a_0 együttható az f(t) jel egyenáramú (DC) összetevőjének felel meg

Matematikai alapok



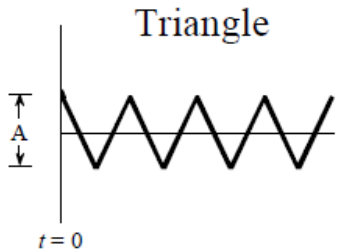


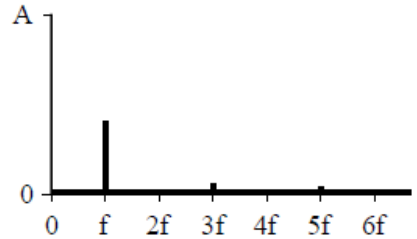
$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = 0$$

(all even harmonics are zero)



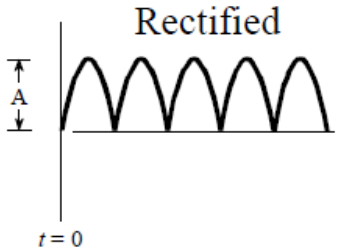


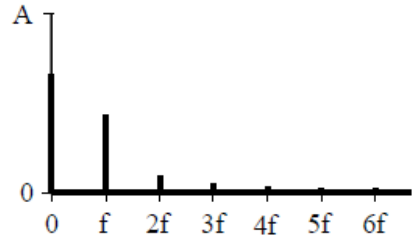
$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{4A}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = 0$$

(all even harmonics are zero)

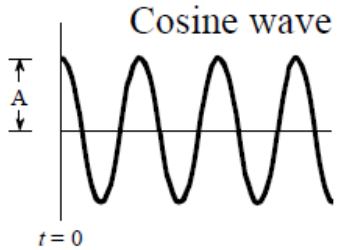


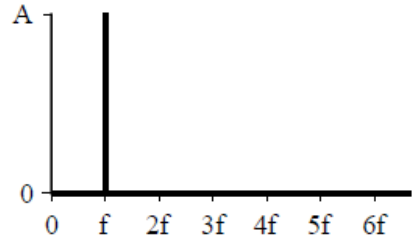


$$a_0 = 2A/\pi$$

$$a_n = \frac{-4A}{\pi(4n^2-1)}$$

$$b_n = 0$$





$$a_1 = A$$

(all other coefficients are zero)

Matematikai alapok

- Fourier transzformáció
  - Periodikus jel Fourier transzformáltja
    - Bevezetve

$$\bar{c}_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad \bar{c}_{-n} = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad c_n = c_{-n}^*$$

    - Felhasználva az Euler-formulát

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \, e^{jn\omega_0 t} \qquad \bar{c}_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt$$

    - Az $\omega = n\omega_0$ diszkrét körfrekvenciákhoz rendelt c_n komplex amplitúdók alkotják az y(t) jel amplitúdó spektrumát
    - c_n komplex amplitúdók megadják az összetevők amplitúdóját és fázisát is
    - Az összetevők frekvenciája az alapfrekvencia egész számú többszöröse
      - Az összetevők amplitúdója és fázisa különböző jelek esetén eltérő lehet
      - Az n = 0-hoz tartozó összetevő a jel egyenáramú (DC) összetevője

Matematikai alapok

- Fourier transzformáció
  - Nem periodikus jel Fourier transzformáltja
    - Nem periodikus jel nem megszámlálhatóan végtelen sok összetevőből áll, amelyek frekvenciái folytonos eloszlásúak
    - Egyetlen frekvenciához nem tartozik véges értékű amplitúdó, de megadható egy $d\omega$ sávra számított amplitúdósűrűség

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \qquad \rightleftarrows \qquad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

    - Az egyenletek kölcsönösen egyértelmű összefüggést – transzformációt – állapítanak meg az f(t) időfüggvény és az F(jω) frekvenciafüggvény között
      - F(jω) az f(t) időfüggvény Fourier transzformáltja
    - Egy jel frekvenciafüggvénye (frekvenciatartománybeli leírása, spektruma) egyértelműen meghatározza a jel időfüggvényét

  - Előny
    - A Fourier transzformációval a differenciál egyenletek algebrai egyenletekké redukálódnak
      - A frekvenciatartományban a az időtartománybeli differenciálást és integrálást algebrai műveletek helyettesítik

Matematikai alapok

- Laplace transzformáció
  - A Fourier transzformált csak akkor létezik ha az f(t) időfüggvény abszolút integrálható
  - Ez korlátozza használatát
  - A Laplace transzformációval ez a korlátozás feloldható
  - Egy időtartománybeli jel Laplace transzformált a jel komplex frekvenciatartománybeli reprezentációja

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} f(s)\, e^{st} ds = f(t)$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = F(j\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = f(t)$$

Matematikai alapok

- Laplace transzformáció
  - Néhány fontosabb jel Laplace transzformáltja

Sorszám	Időfüggvény	Laplace-transzformált
1	$F(t) \quad t > 0$	$F(s)$
2	$\delta(t)$	1
3	$\delta(t\text{-}\tau)$	$e^{-s\tau}$
4	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
5	$1(t\text{-}\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-s\tau}$
6	t	$\frac{1}{s^2}$
7	$e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{a+s}$
8	$\frac{1}{T}e^{-t/T}$	$\frac{1}{1+Ts}$
9	$1-e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$

Matematikai alapok

- Laplace transzformáció
  - Néhány fontosabb jel Laplace transzformáltja

Sorszám	Időfüggvény	Laplace-transzformált
10	$\frac{1}{T^2} t e^{-t/T}$	$\frac{1}{(1+Ts)^2}$
11	$\frac{1}{T_1 - T_2}\left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right)$	$\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$
12	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
13	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
14	$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
15	$-\frac{1}{T}\mathrm{sh}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{1-T^2 s^2}$
16	$\frac{1}{T^3}(T-t)e^{-t/T}$	$\frac{s}{(1+Ts)^2}$
17	$T\left(e^{-t/T} + \frac{t}{T} - 1\right)$	$\frac{1}{s^2(1+Ts)}$
18	$1 - \frac{T+t}{t} e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$

Matematikai alapok

- Laplace transzformáció
  - Műveleti szabályok
    - Differenciálás

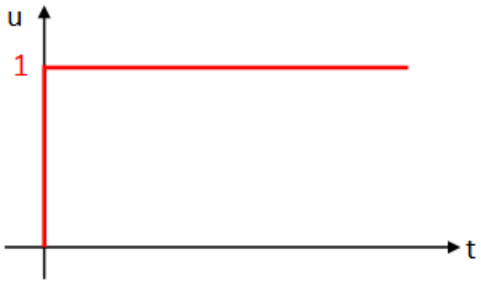
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(-0)$$

      - Belépő jel esetén f(t<+0) = 0

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s)$$

      - Differenciálás a komplex frekvenciatartományban

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$



egységugrás

    - Integrálás

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-0}^{\tau} f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

    - Eltolási tételek

$$\mathcal{L}\{f(t \pm T)\} = e^{\pm sT}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

    - Linearitás

$$\mathcal{L}^{-1}\{cF(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) + F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Matematikai alapok

- Laplace transzformáció
  - Műveleti szabályok
    - Belépő jelek konvolúciója

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-0}^{t} f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s)$$

    - Racionális törtfüggvény inverz transzformáltja
      - Ha egy Laplace transzformált racionális törtfüggvény alakra hozható, akkor részlettörtekre bontható
      - Tagonként az időtartományba transzformálható
      - Ha a D(s) nevező gyökei egyszeresek

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + b_3 s^{m-2} + \cdots + b_{m+1}}{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + a_3 s^{n-2} + \cdots + a_{n+1}} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_1} + \cdots + \frac{r_n}{s-p_n} \qquad r_n = \left[(s-p_n)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=p_n}$$

      - Ha a nevező gyökei között vannak többszörös gyökök
        - » a gyökhöz részlettörtekre bontáskor a multiplicitásával egyező számú részlettört tartozik
        - » Pl. ha a j-edik gyök k-szoros

$$\frac{r_j}{s-p_j} + \frac{r_{j+1}}{(s-p_j)^2} + \cdots + \frac{r_{j+1+k}}{(s-p_j)^k}$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - Terheletlen RC kör
    - Időtartománybeli leírás

$$\frac{d}{dt}u_C(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_{be}(t) \qquad y(t) = u_C(t)$$

    - Frekvenciatartománybeli leírás Laplace transzformációval

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(-0)$$

$$s\,u_C(s) = \qquad + u_C(-0)$$

$$y(s) = u_C(s)$$

    - Kérdés 1: hogyan változik a rendszer kimenete a bemenő jel és az állapotváltozó kezdeti értékének függvényében?
    - Kérdés 2: hogyan változik az állapotváltozó a bemenő jel függvényében?
      - A kimeneti jel változása ebből és a kimeneti egyenletből meghatározható
    - Meg kell oldani a differenciál egyenletet

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - Terheletlen RC kör
    - Állapotegyenlet megoldása az időtartományban

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

    - Lineáris állandó együtthatós elsőrendű differenciál egyenlet megoldása

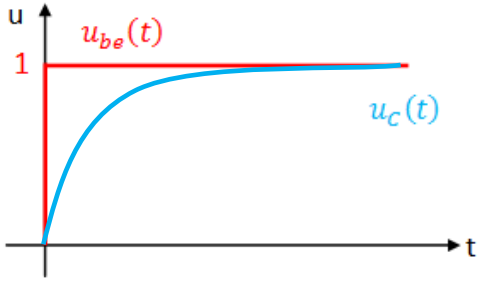
$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

    - Egységugrás bemenő jelet feltételezve

$$\frac{d}{dt}u_C(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_{be}(t)$$

$$u_{be}(t) = \varepsilon(t) \qquad \begin{array}{ll} u_{be}(t) = 0 & t < 0 \\ u_{be}(t) = 1 & t \geq 0 \end{array}$$

$$u_C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$



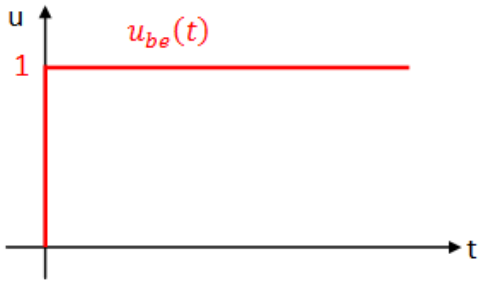
egységugrás

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - Terheletlen RC kör
    - Állapotegyenlet megoldása a frekvenciatartományban

$$s\,u_C(s) = -\frac{1}{RC}u_C(s) + \frac{1}{RC}u_{be}(s) + \cancel{u_C(-0)} \longleftarrow \frac{d}{dt}u_C(t) = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u_{be}(t)$$

$$u_{be}(t) = \varepsilon(t) \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \qquad u_C(-0) = 0$$



egységugrás

$$s\,u_C(s) = -\frac{1}{RC}u_C(s) + \frac{1/RC}{s}$$

$$s\,u_C(s) + \frac{1}{RC}u_C(s) = \frac{1/RC}{s}$$

$$u_C(s)\left(s + \frac{1}{RC}\right) = \frac{1/RC}{s}$$

$$u_C(s) = \frac{1/RC}{s}\cdot\frac{1}{(s+1/RC)} \longleftarrow \mathcal{L}^{-1}\{u_C(s)\} = u_C(t)$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leí
  - Terheletlen RC kör
    - Ha egy Laplace transzformált racionális törtfüggvény alakra h

Sorszám	Időfüggvény	Laplace-transzformált
1	$F(t) \quad t>0$	$F(s)$
2	$\delta(t)$	1
3	$\delta(t-\tau)$	$e^{-s\tau}$
4	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
5	$1(t-\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-s\tau}$
6	t	$\frac{1}{s^2}$
7	$e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{a+s}$
8	$\frac{1}{T}e^{-t/T}$	$\frac{1}{1+Ts}$
9	$1-e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_1}+\cdots$$

$$u_C(s)=\frac{1/RC}{s}\cdot\frac{1}{(s+1/RC)}=\frac{1/RC}{(s+0)}\cdot\frac{1}{(s+1/RC)}=\frac{r_1}{s+0}+\frac{}{s}$$

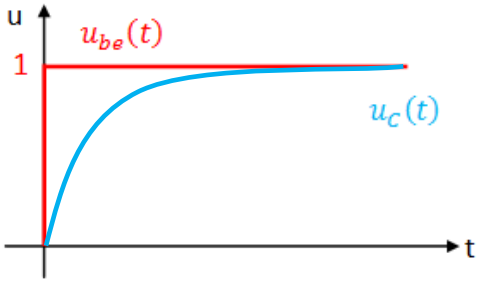
$$p_2=-1/RC$$

$$r_1=\left[\cancel{(s+0)}\frac{1/RC}{\cancel{(s+0)}}\cdot\frac{1}{(s+1/RC)}\right]_{s=0}=\frac{1/RC}{1/RC}=1$$

$$r_2=\left[\cancel{(s+1/RC)}\frac{1/RC}{(s+0)}\cdot\frac{1}{\cancel{(s+1/RC)}}\right]_{s=-1/RC}=-\frac{1/RC}{1/RC}=-1$$

$$u_C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/RC} \quad \Big/ \mathcal{L}^{-1}\{.\}$$

$$\boxed{u_C(t)=\varepsilon(t)\left(\qquad\right)}$$



egységugrás

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Időtartománybeli leírás

$$\frac{d\,i(t)}{dt} = \frac{1}{L}u(t) - \frac{R}{L}i(t) - \frac{K_B}{L}\omega_m(t)$$

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{K_T}{J_m}i(t) - \frac{B}{J_m}\omega_m(t) - \frac{1}{J_m}M_t(t)$$

$$x_1 \leftarrow i(t) \qquad x_2 \leftarrow \omega_m(t)$$

$$u_1 \leftarrow u(t) \qquad u_2 \leftarrow M_t(t)$$

$$\left.\right\} \quad \dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du$$

    - Frekvenciatartománybeli leírás Laplace transzformációval

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(-0)$$

$$s\,i(s) = \qquad + i(-0)$$

$$s\,\omega_m(s) = \qquad + \omega_m(-0)$$

$$y_1(s) = i(s)$$

$$y_2(s) = \omega_m(s)$$

$$s\,x(s) = Ax(s) + Bu(s) + x(-0)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & -\frac{B}{J_m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Állapotegyenlet megoldása a frekvenciatartományban

$$s\,x(s) = Ax(s) + Bu(s) + x(-0)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

$$s\,i(s) = -\frac{R}{L}i(s) - \frac{K_B}{L}\omega_m(s) + \frac{1}{L}u(s) + i(-0)$$

$$s\,\omega_m(s) = \frac{K_T}{J_m}i(s) - \frac{B}{J_m}\omega_m(s) - \frac{1}{J_m}M_t(s) + \omega_m(-0)$$

- Kérdés 2: hogyan változik az állapotváltozó a bemenő jel függvényében?
  - A kimeneti jel változása ebből és a kimeneti egyenletből meghatározható

$$s\,x(s) = Ax(s) + Bu(s) + x(-0)$$

$$s\,x(s) - Ax(s) = Bu(s) + x(-0)$$

$$(sI - A)x(s) = Bu(s) + x(-0) \qquad / \; (sI - A)^{-1}$$

$$\cancel{(sI - A)^{-1}}\,\cancel{(sI - A)}x(s) = (sI - A)^{-1}[Bu(s) + x(-0)]$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}[Bu(s) + x(-0)]$$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}[Bu(s) + x(-0)] + Du(s)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Állapotegyenlet megoldása a frekvenciatartományban

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}[Bu(s) + x(-0)] + Du(s)$$

    - Szétválasztható egy bemenő jeltől függő, és egy bemenő jeltől független, csak x(-0)-tól függő összetevőre

---

    - A magára hagyott rendszer mozgása, saját mozgás
      - Ha a bemenő jel zérus: u(t) = 0, u(s) = 0

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}[\cancel{Bu(s)} + x(-0)] + \cancel{Du(s)}$$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}x(-0)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)}$$

    - A rendszer gerjesztett mozgása
      - Ha x(-0) = 0
      - A rendszer tulajdonságainak vizsgálatakor általában elegendő ezt az esetet vizsgálni

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s)$$

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)$$

$$\boxed{w(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

    - A rendszer átviteli függvénye (mátrix)

$$y(s) = w(s)u(s)$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Állapotegyenlet megoldása a frekvenciatartományban

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & -\frac{B}{J_m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    - A kimeneti jel a w(s) átviteli függvény és a bemeneti jel Laplace transzformáltjának ismeretében kiszámítható

$$y(s) = w(s)u(s) \qquad w(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & -\frac{B}{J_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{K_B}{L} \\ -\frac{K_T}{J_m} & s + \frac{B}{J_m} \end{bmatrix}$$

    - Az inverz mátrix számításához szükség van a determinánsra és az adjungált mátrixra

$$adjA = adj \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) = \left(s + \frac{R}{L}\right)\left(s + \frac{B}{J_m}\right) + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}$$

$$= s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}$$

$$adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{B}{J_m} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Több bemenetű és/vagy több kimenetű rendszer esetén minden bemenet-kimenet kombinációhoz tartozik egy skalár (nem mátrix) átviteli függvény
    - Esetünkben 2 bemenet, 2 kimenet, 4 átviteli függvény

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & -\frac{B}{J_m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{B}{J_m} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) =$$

$$= s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}$$

$$w(s) = \cancel{C}(sI - A)^{-1}B + \cancel{D}$$

$$w(s) = (sI - A)^{-1}B$$

$$w(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) = \frac{y_1(s)}{u_1(s)} & w_{12}(s) = \frac{y_1(s)}{u_2(s)} \\ w_{21}(s) = \frac{y_2(s)}{u_1(s)} & w_{22}(s) = \frac{y_2(s)}{u_2(s)} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{B}{J_m} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}}$$

$$w(s) = \frac{adj(sI - A)B}{det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{B}{J_m} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix}}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}}$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Több bemenetű és/vagy több kimenetű rendszer esetén minden bemenet-kimenet kombinációhoz tartozik egy skalár (nem mátrix) átviteli függvény
    - Esetünkben 2 bemenet, 2 kimenet, 4 átviteli függvény

$$w(s) = \frac{adj(sI - A)B}{det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{B}{J_m} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix}}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}}$$

$$w(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) = \dfrac{}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} & w_{12}(s) = \dfrac{}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} \\ w_{21}(s) = \dfrac{}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} & w_{22}(s) = \dfrac{}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J_m}\right)s + \frac{R}{L}\frac{B}{J_m} + \frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} \end{bmatrix}$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Több bemenetű és/vagy több kimenetű rendszer esetén minden bemenet-kimenet kombinációhoz tartozik egy skalár (nem mátrix) átviteli függvény
    - Esetünkben 2 bemenet, 2 kimenet, 4 átviteli függvény

$$w(s) = \frac{adj(sI-A)B}{det(sI-A)} = \frac{\begin{bmatrix} \boxed{s+\frac{B}{J_m}} & \boxed{-\frac{K_B}{L}} \\ \frac{K_T}{J_m} & s+\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{-\frac{1}{J_m}} \end{bmatrix}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}}$$

$$w(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) = \dfrac{\frac{1}{L}s+\frac{B}{J_m L}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} & w_{12}(s) = \dfrac{}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} \\ w_{21}(s) = \dfrac{}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} & w_{22}(s) = \dfrac{}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} \end{bmatrix}$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Több bemenetű és/vagy több kimenetű rendszer esetén minden bemenet-kimenet kombinációhoz tartozik egy skalár (nem mátrix) átviteli függvény
    - Esetünkben 2 bemenet, 2 kimenet, 4 átviteli függvény

$$w(s) = \frac{adj(sI-A)B}{det(sI-A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+\frac{B}{J_m} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & s+\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}}$$

$$w(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) = \dfrac{\frac{1}{L}s+\frac{B}{J_m L}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} & w_{12}(s) = \dfrac{\frac{K_B}{J_m L}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} \\ w_{21}(s) = \dfrac{\quad}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} & w_{22}(s) = \dfrac{\quad}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} \end{bmatrix}$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Több bemenetű és/vagy több kimenetű rendszer esetén minden bemenet-kimenet kombinációhoz tartozik egy skalár (nem mátrix) átviteli függvény
    - Esetünkben 2 bemenet, 2 kimenet, 4 átviteli függvény

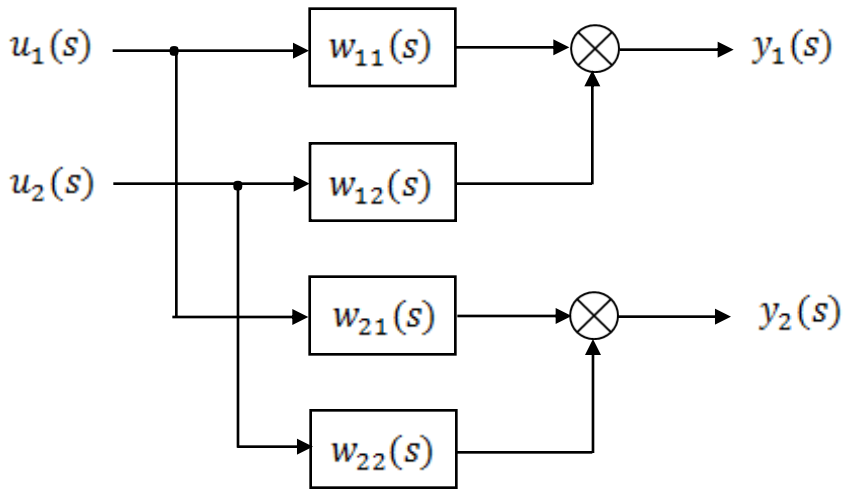
$$w(s) = \frac{adj(sI-A)B}{det(sI-A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+\frac{B}{J_m} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & s+\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}}$$

$$w(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) = \dfrac{\frac{1}{L}s+\frac{B}{J_m L}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} & w_{12}(s) = \dfrac{\frac{K_B}{J_m L}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} \\ w_{21}(s) = \dfrac{\frac{K_T}{J_m L}}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} & w_{22}(s) = \dfrac{}{s^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{B}{J_m}\right)s+\frac{R}{L}\frac{B}{J_m}+\frac{K_B}{L}\frac{K_T}{J_m}} \end{bmatrix}$$

Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - MIMO rendszer esetén

$$w(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) = \dfrac{y_1(s)}{u_1(s)} & w_{12}(s) = \dfrac{y_1(s)}{u_2(s)} \\ w_{21}(s) = \dfrac{y_2(s)}{u_1(s)} & w_{22}(s) = \dfrac{y_2(s)}{u_2(s)} \end{bmatrix}$$



Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor
    - Az átviteli függvények ismeretében tetszőleges bemenő jelre kiszámíthatjuk a kimeneti jel időfüggvényét
    - Ismerni kell a bemenő jel Laplace transzformáltját

$$y_1(s) = w_{11}(s)\, u_1(s) \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \qquad w_{11}(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+8}$$

    - Impulzusválasz (impulse response), súlyfüggvény w(t)
      - Egységimpulzus bemeneti jel esetén: $u_1(t) = \delta(t)$

$$y_1(s) = w_{11}(s)\, u_1(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+8} \cdot 1 = \frac{1.5}{s+4} - \frac{0.5}{s+2}$$

$$y_1(t) = \varepsilon(t)(\qquad\qquad) = w_{11}(t)$$

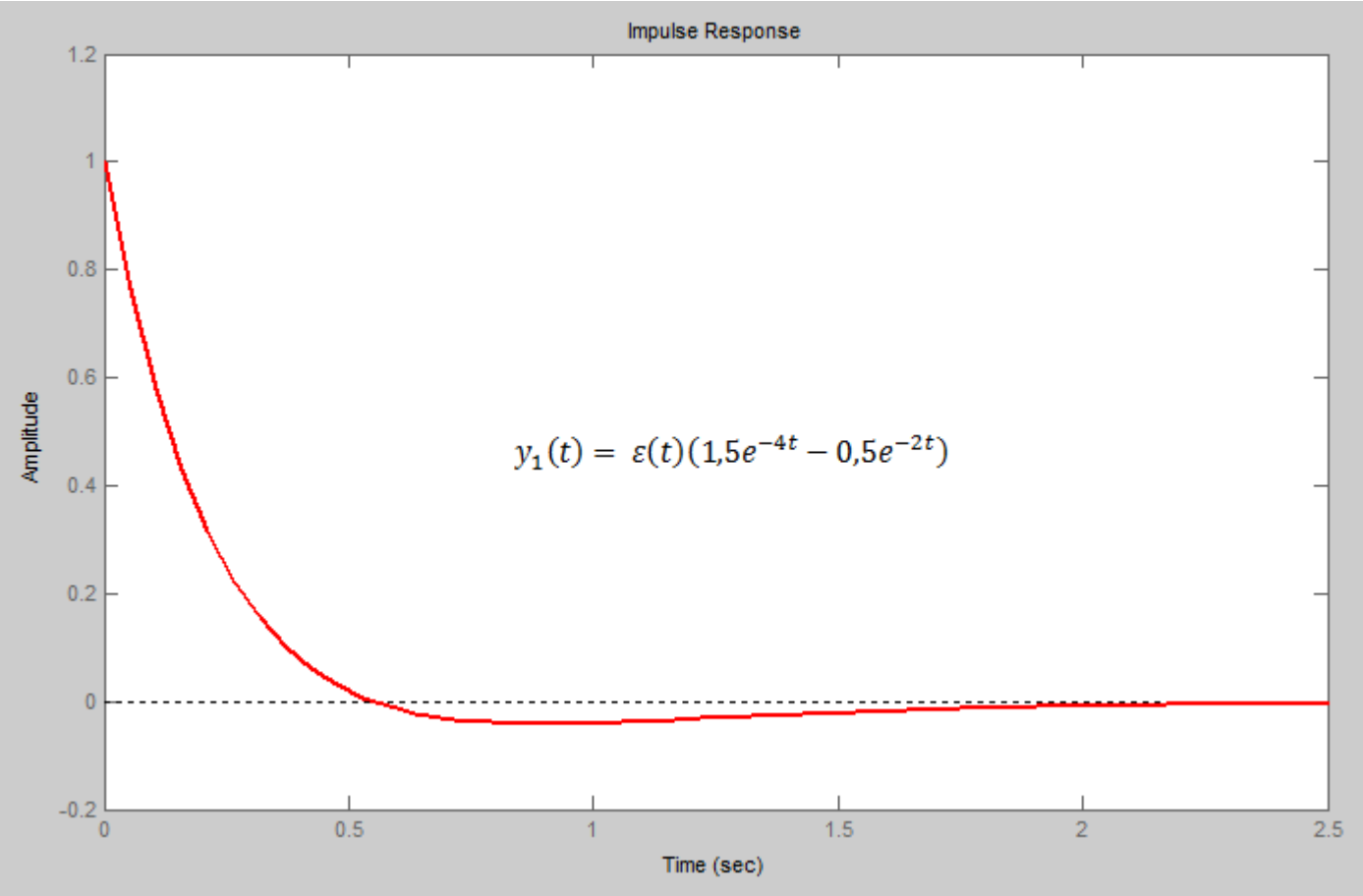
    - Egységugrás-válasz (step response), átmeneti függvény v(t)
      - Egységugrás bemeneti jel esetén: $u_1(t) = \varepsilon(t)$

$$y_1(s) = w_{11}(s)\, u_1(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+8} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{0.375}{s+4} + \frac{0,25}{s+2} + \frac{0.125}{s}$$

$$y_1(t) = \varepsilon(t)(\qquad\qquad\qquad\qquad) = v_{11}(t)$$

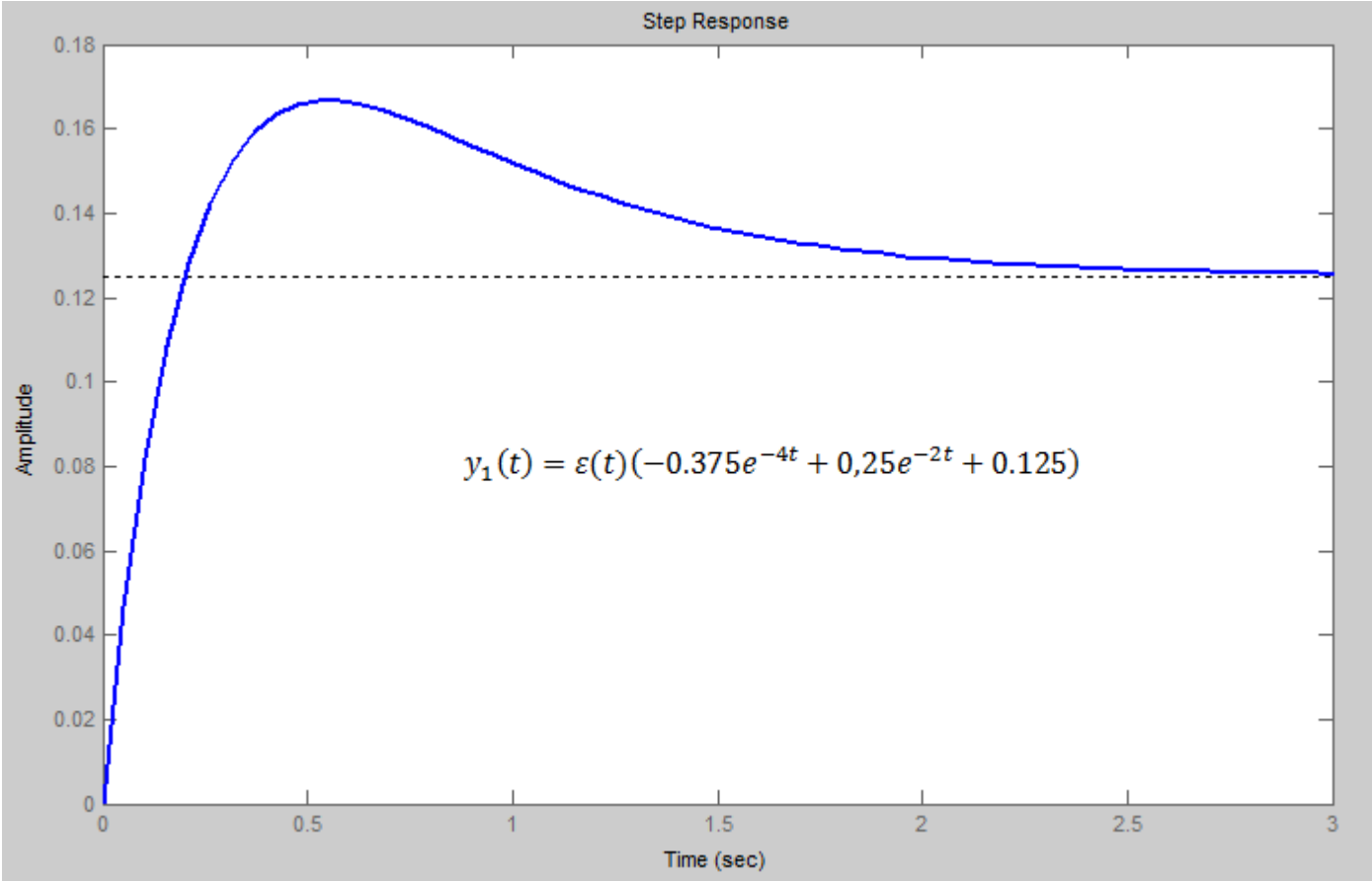
Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor



Állapotegyenlet

- Példarendszerek frekvenciatartománybeli leírása
  - DC motor



Állapotegyenlet

- Gyakorló feladatok
  - Komplex amplitúdó
  - Fourier transzformáció
  - Laplace transzformáció, inverz Laplace transzformáció
    - Dinamikus rendszerek