Irányítástechnika

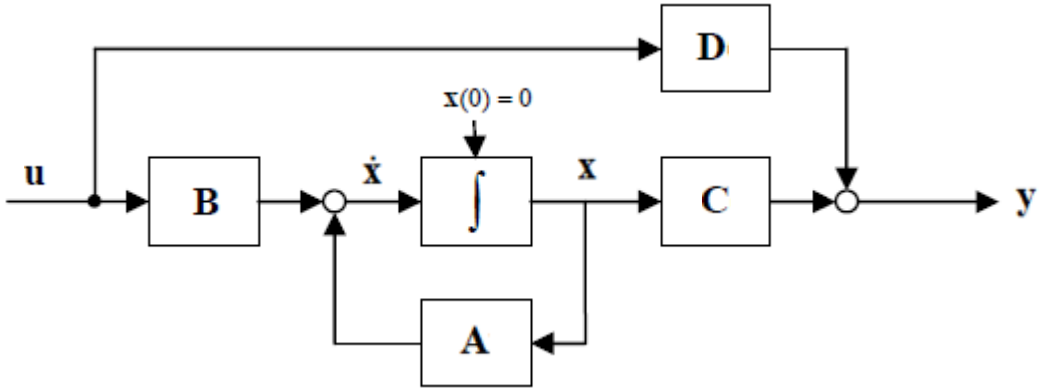
II. rész

Dr. Turóczi Antal
turoczi.antal@nik.uni-obuda.hu

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Lineáris tagok modellje
    - Differenciálegyenlettel adjuk meg
      - Állapotegyenlet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$



- Az állapotegyenleteken kívül különböző függvényekkel is jellemezhetünk egy tagot
  - A ki és bemenő jelek közötti kapcsolatot adják meg
  - Dirac delta bemenetre adott válasz
    - » Impulzusválasz, súlyfüggvény: w(t)
  - Egységugrás bemenetre adott válasz
    - » Ugrásválasz, átmeneti függvény: v(t)

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Átviteli függvény
    - Az y(t) kimenő és u(t) bemenő jele Laplace transzformáltjának a hányadosa

$$\mathcal{L}\{w(t)\} = w(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + b_3 s^{m-2} + \cdots + b_{m+1}}{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + a_3 s^{n-2} + \cdots + a_{n+1}} \qquad m \leq n$$

    - n-tárolós tagra az átviteli függvény az s változó racionális törtfüggvénye
    - A számláló valós vagy komplex konjugált gyökei
      - az átviteli függvény zérusai: $z_1, z_2 \ldots, z_m$
    - A nevező valós vagy komplex konjugált gyökei
      - az átviteli függvény pólusai : $p_1, p_2 \ldots, p_n$
    - Az átviteli függvény gyöktényezős alakja

$$w(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + b_3 s^{m-2} + \cdots + b_{m+1}}{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + a_3 s^{n-2} + \cdots + a_{n+1}} = k_{zp} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)}$$

$$w(s) = k_{zp} \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)}$$

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Átviteli függvény
    - Sokszor előnyösebb a gyökök negatív reciprokát használni
      - Időállandók

$$\tau_i = -\frac{1}{z_i} \qquad T_i = -\frac{1}{p_i}$$

      - Valós gyökökhöz valós, komplex gyökökhöz komplex időállandó tartozik

$$w(s) = k_{zp}\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \boxed{k_{zp}\frac{(-z_1)(-z_2)\dots(-z_m)}{(-p_1)(-p_2)\dots(-p_n)}}\frac{\left(1-\boxed{\frac{s}{z_1}}\right)\left(1-\frac{s}{z_2}\right)\dots\left(1-\frac{s}{z_m}\right)}{\left(1-\frac{s}{p_1}\right)\left(1-\boxed{\frac{s}{p_2}}\right)\dots\left(1-\frac{s}{p_n}\right)}$$

$$k_{tc} = k_{zp}\frac{(-z_1)(-z_2)\dots(-z_m)}{(-p_1)(-p_2)\dots(-p_n)}$$

$$w(s) = k_{tc}\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\dots(1+s\tau_m)}{(1+sT_1)(1+sT_2)\dots(1+sT_n)}$$

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Átviteli függvény
    - Sokszor előnyösebb a gyökök negatív reciprokát használni

$$w(s) = k_{zp}\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

  - A gyöktényezős átalakítás $z_i = 0$ zérusok és $p_i = 0$ pólusok esetén nem hajtható végre
    - » Ezeket eredeti alakjukban kell megőrizni
  - Ha a gyöktényezős alakban csak valós együtthatókat szeretnénk a komplex konjugált gyököket másodfokú tényezőkké kell összevonni
    - » Pl:

$$p_i = a + jb \qquad p_i^* = a - jb$$

$$(s - p_i)(s - p_i^*) = s^2 - 2as + (a^2 + b^2) = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

vagy az időállandókkal kifejezve

$$(1 - sT_i)(1 - sT_i^*) = 1 + 2\xi T_0 s + T_0^2 s^2$$

    - » ω_0: sajátfrekvencia (natural frequency): $\omega_0^2 = a^2 + b^2$ $\qquad T_0 = 1/\omega_0$
    - » ξ : csillapítási tényező (damping factor): $\xi = -a/\omega_0$

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Lineáris tagok megadás
    - Átviteli függvény

$$w(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + b_3 s^{m-2} + \cdots + b_{m+1}}{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + a_3 s^{n-2} + \cdots + a_{n+1}}$$

    - Állapotegyenlet

$$w(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

    - Gyöktényezős alak

$$w(s) = k_{zp} \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)}$$

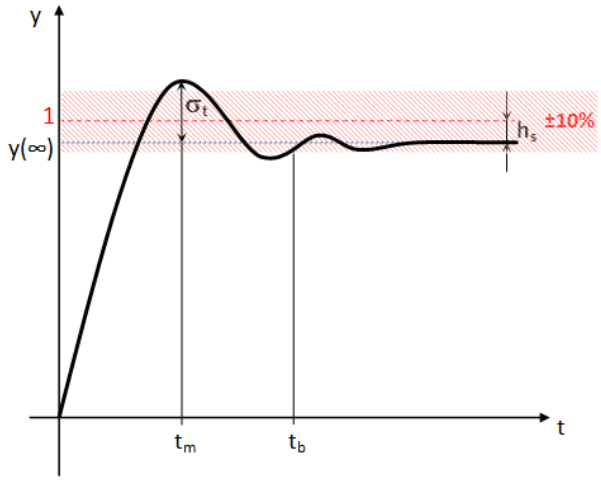
Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Átmeneti függvény
    - Az egységugrás bemeneti jelre adott válasz Laplace transzformáltja

$$u(t) = \varepsilon(t) \qquad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \qquad y(s) = w(s)u(s)$$

$$v(s) = w(s)u(s) = \frac{w(s)}{s} \qquad v(t) = \int_0^t w(t)\,dt$$

  - Az átviteli függvény 1/s –szerese
  - Az ugrásválasz az impulzusválasz idő szerinti integráljaként számolható



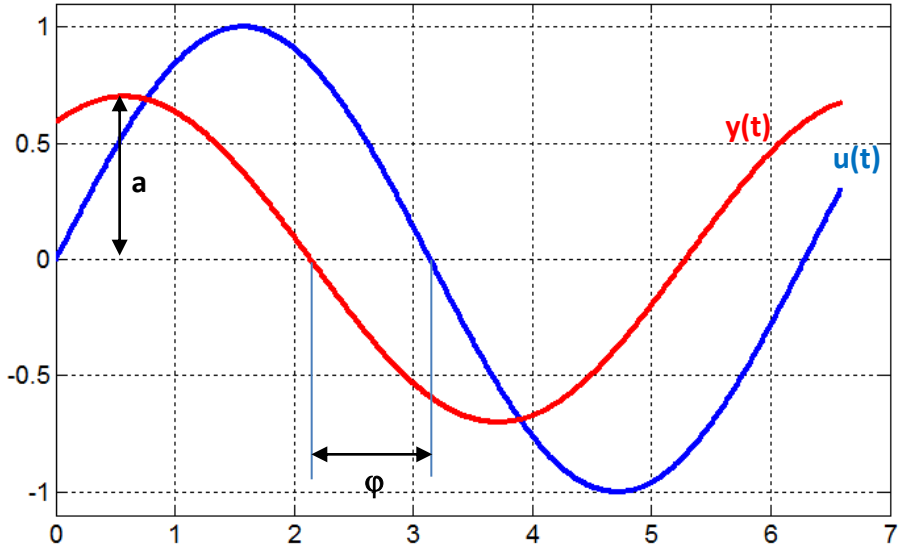
Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Az u(s) bemenő és y(s) kimenő jel közötti kapcsolatot leíró w(s) átviteli függvényből
      - s = jω helyettesítéssel

$$w(j\omega) = w(s)|_{s=j\omega}$$

      - Stabilis lineáris tag esetén egységnyi amplitúdójú zérus fázisú szinuszos bemenő jelre

$$u(t) = sin(\omega t) \qquad y(t) = a\, sin(\omega t + \varphi)$$



Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Az u(s) bemenő és y(s) kimenő jel közötti kapcsolatot leíró ω(s) átviteli függvényből
      - s = jω helyettesítéssel

$$w(j\omega) = w(s)|_{s=j\omega}$$

      - Stabilis lineáris tag esetén egységnyi amplitúdójú zérus fázisú szinuszos bemenő jelre

$$u(t) = sin(\omega t) \qquad\qquad y(t) = a\, sin(\omega t + \varphi)$$

      - A kimenőjel *a* amplitúdója és φ fázisa különböző ω frekvenciákon más-más lehet
      - Az amplitúdó és a fázistolás frekvencia függése a frekvencia átviteli függvényből meghatározható

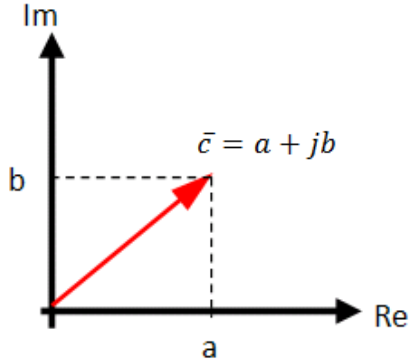
$$w(j\omega) = \boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big) + j\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big) \;= a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$a(\omega) = \boldsymbol{abs}\big(w(j\omega)\big)$$

$$\varphi(\omega) = \boldsymbol{arc}\big(w(j\omega)\big)$$

Matematikai alapok

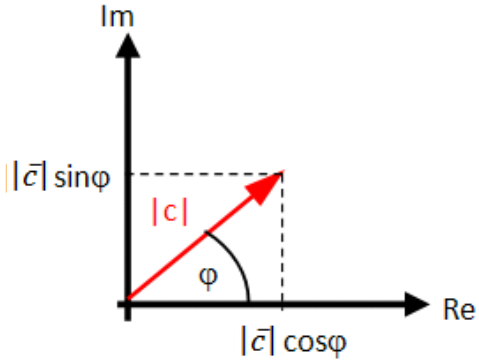
- Komplex számok
  - Valós rész $Re\{\bar{c}\} = a$
  - Képzetes rész $Im\{\bar{c}\} = b$
  - Síkvektorként ábrázolható



$$\bar{c} = a + jb$$

$$j = \sqrt{-1}$$

  - Polár koordináta rendszer



- Komplex konjugált

$$\bar{c}^* = a - jb$$

- Abszolút érték

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c} \cdot \bar{c}^*}$$

$$|\bar{c}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)}$$

- Euler formula

$$\bar{c} = |\bar{c}|(cos\varphi + jsin\varphi) = |\bar{c}|e^{j\varphi}$$

  - Amplitúdó, fázisszög
  - Adott frekvenciájú szinuszos jel ezzel a két paraméterrel jellemezhető

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Az u(s) bemenő és y(s) kimenő jel közötti kapcsolatot leíró ω(s) átviteli függvényből
      - s = jω helyettesítéssel

$$w(j\omega) = w(s)|_{s=j\omega}$$

      - Stabilis lineáris tag esetén egységnyi amplitúdójú zérus fázisú szinuszos bemenő jelre

$$u(t) = sin(\omega t) \qquad\qquad y(t) = a\, sin(\omega t + \varphi)$$

      - A kimenőjel *a* amplitúdója és φ fázisa különböző ω frekvenciákon más-más lehet
      - Az amplitúdó és a fázistolás frekvencia függése a frekvencia átviteli függvényből meghatározható

$$w(j\omega) = \boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big) + j\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big) \;= a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$a(\omega) = \boldsymbol{abs}\big(w(j\omega)\big)$$

$$\varphi(\omega) = \boldsymbol{arc}(w(j\omega))$$

$$a(\omega) = \boldsymbol{abs}\big(w(j\omega)\big) = \sqrt{\big[\boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big)\big]^2 + \big[\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big)\big]^2}$$

$$\varphi(\omega) = \boldsymbol{arc}\big(w(j\omega)\big) = artg\frac{\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big)}{\boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big)}$$

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Komplex változós függvény amely többféle alakban ábrázolható

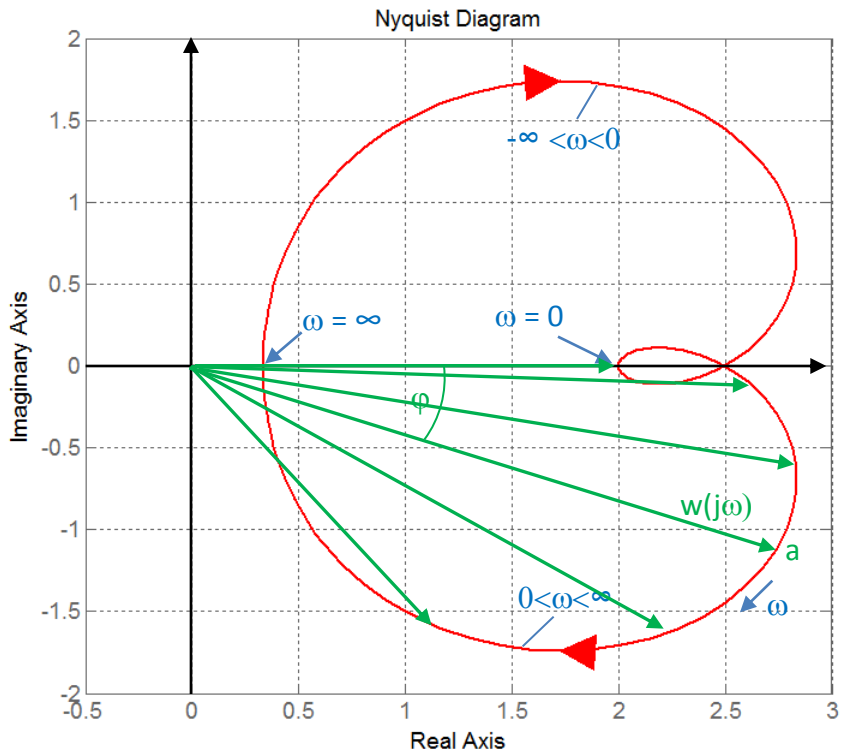
$$w(j\omega) = \boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big) + j\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big) \;= a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

  - **Nyquist diagram**: a w(jω) vektort a komplex síkon ábrázolva -∞ < ω < ∞ paraméterrel
  - Pl:

$$w(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

$$w(j\omega) = \frac{2(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3}$$

$$w(j\omega) = \boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big) + j\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big)$$



$u(t) = sin(\omega t)$

$y(t) = a\, sin(\omega t + \varphi)$

- Matlab:
  - `nyquist(sys)`

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Komplex változós függvény amely többféle alakban ábrázolható

$$w(j\omega) = \boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big) + j\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big) \;= a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

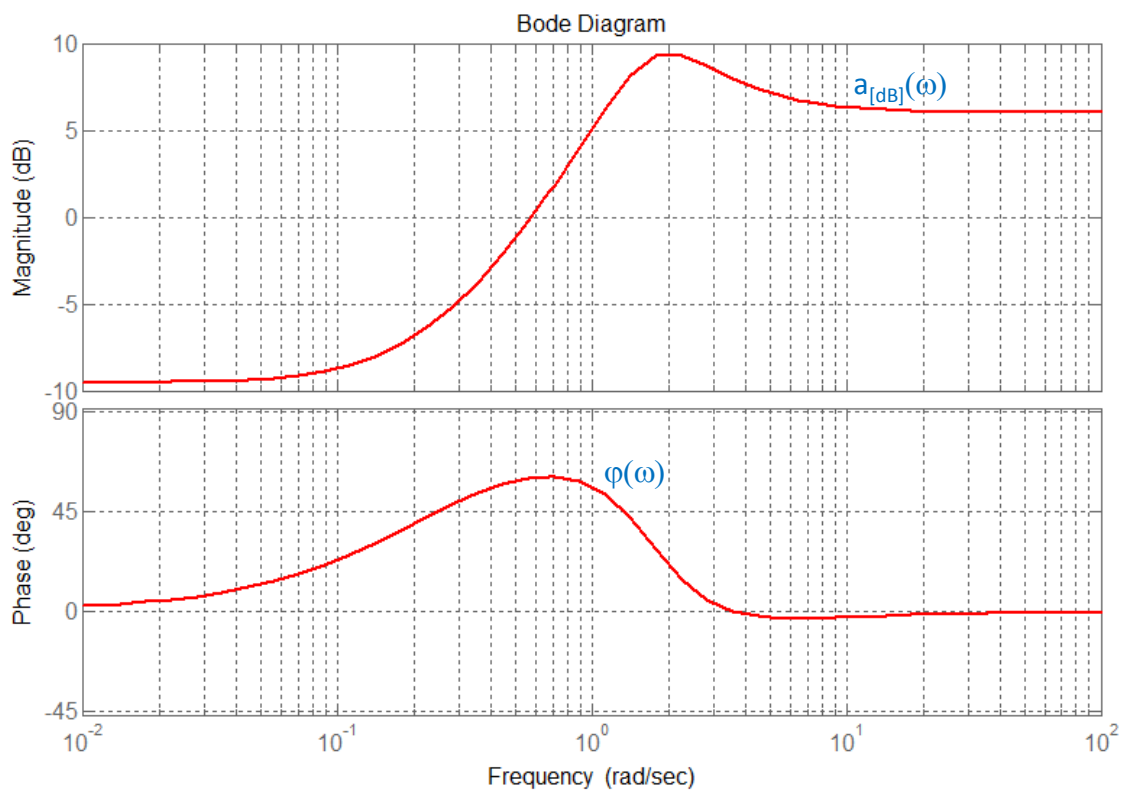
  - **Bode diagram**: az a(ω) amplitúdó és φ(ω) fázismenetet külön ábrázolva
  - Pl:

$$w(j\omega) = \frac{2(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 3}$$

$$a(\omega) = \boldsymbol{abs}\big(w(j\omega)\big)$$

$$\varphi(\omega) = \boldsymbol{arc}\big(w(j\omega)\big)$$

$$a_{[dB]}(\omega) = 20\,log_{10}[a(\omega)]$$



- Matlab:
  - `bode(sys)`

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Bode diagram
      - Szerkesztéskor az átviteli függvény gyöktényezős alakjából érdemes kiindulni

$$w(s) = k_{tc}\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\dots(1+s\tau_m)}{(1+sT_1)(1+sT_2)\dots(1+sT_n)}$$

      - Az egyes gyöktényezők logaritmikus amplitúdói és fázisszögei az eredő képzésnél egyszerűen összeadódnak

$$\log(a\cdot b\cdot c) = \log(a) + \log(b) + \log(c)$$

      - Egyetlen elsőfokú gyöktényezőre:

$$w(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

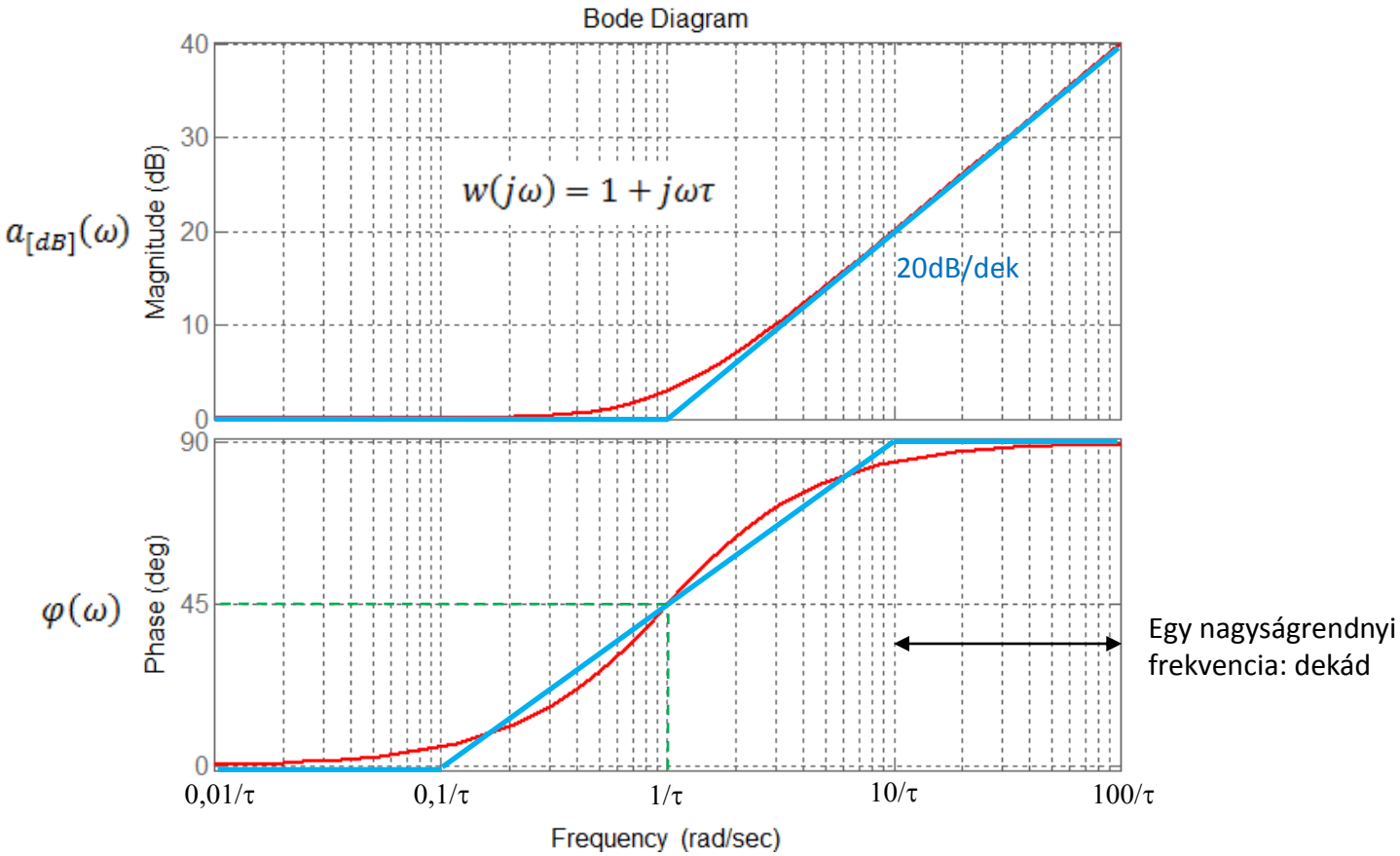
$$\varphi(\omega) = arctg\frac{\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big)}{\boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big)} = arctg(\omega\tau)$$

$$a(\omega) = \sqrt{\big[\boldsymbol{Re}\big(w(j\omega)\big)\big]^2 + \big[\boldsymbol{Im}\big(w(j\omega)\big)\big]^2} = \sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

$$a_{[dB]}(\omega) = 20\,log_{10}\sqrt{1+\omega^2\tau^2} = 10\,log_{10}(1+\omega^2\tau^2)$$

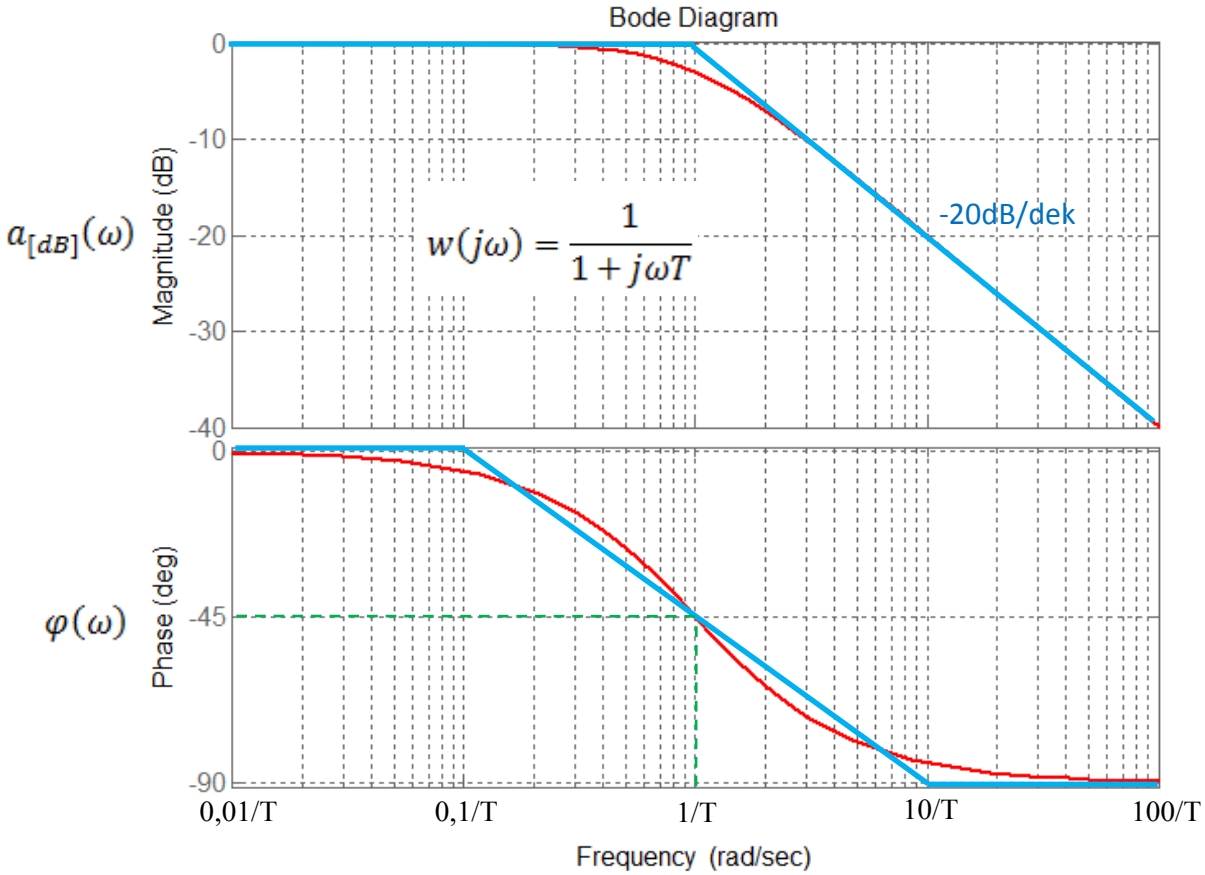
Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Bode diagram
      - Egyetlen elsőfokú gyöktényezőre:



Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Bode diagram
      - Egyetlen elsőfokú gyöktényezőre:



Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Bode diagram
      - Elsőfokú gyöktényezőre
        - » Az amplitúdó görbe meredeksége 20dB/dek illetve -20dB/dek
        - » A fázis 0 ° és 90° illetve 0 ° és -90° között változik
      - Másodfokú gyöktényezőre
        - » Az amplitúdó görbe meredeksége 40dB/dek
      - A gyöktényezők ismeretében közelítő Bode diagram rajzolható

$$w(j\omega) = \frac{s + 0{,}1}{s^3 + 21s^2 + 120s + 100} = \frac{s + 0{,}1}{(s+1)(s+10)(s+10)}$$

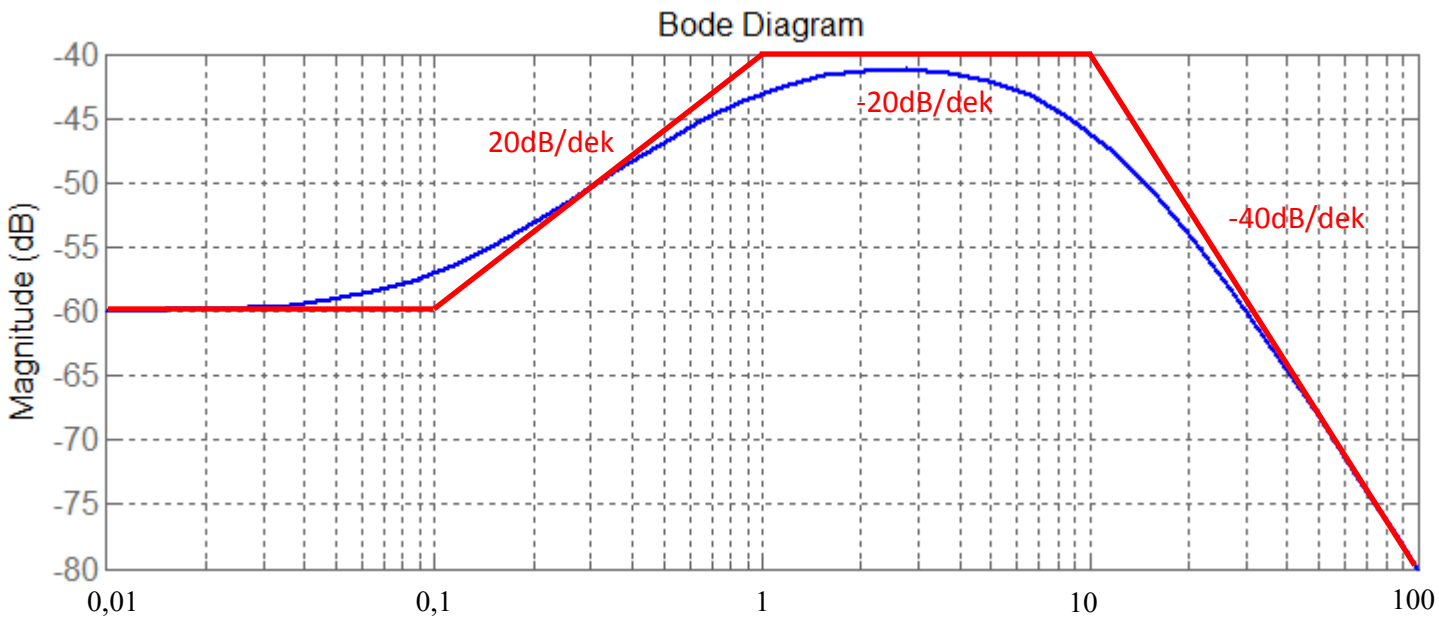
      - Törésfrekvenciák:
        - » 0,1 rad/sec [20dB/dek]
        - » 1 rad/sec [-20dB/dek]
        - » 10 rad/sec [-40dB/dek]

      - Az $\omega = 0$ körfrekvencián az amplitúdó menet $\omega = 0$ behelyettesítéssel számítható
        - » w(0) = 0,1/100 = 1/1000 [-60dB]

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - Bode diagram

$$w(j\omega) = \frac{s + 0{,}1}{(s+1)(s+10)(s+10)}$$



  - A fázis diagramra általában nem kielégítő a töréspontos közelítés (főleg nagyobb fokszám esetén)

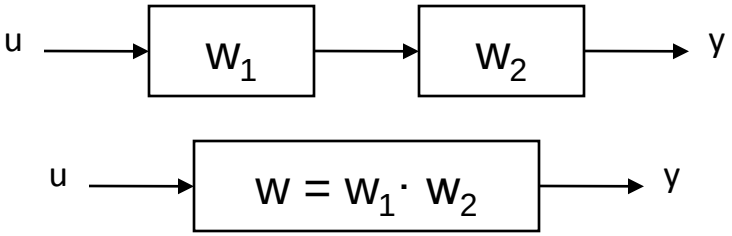
Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Frekvencia átviteli függvény
    - A Bode és Nyquist diagramokból
      - Az adott tag az ω körfrekvenciájú harmonikus jelet milyen amplitúdó és fázis „torzítással” viszi át
      - Milyen körfrekvenciákon van vannak jelentős kiemelések vagy elnyomások
      - A jelátvivő tag hogyan viselkedik mint szűrő
      - Stabilitásvizsgálat (később)

Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

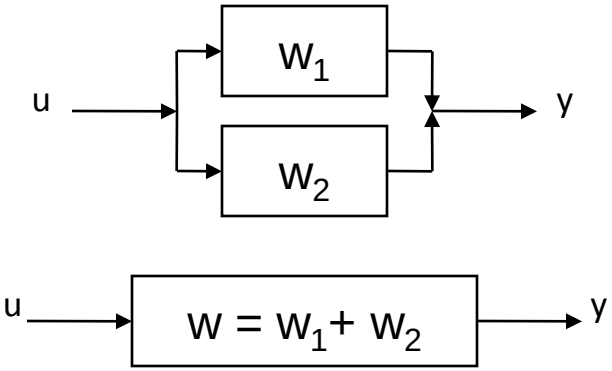
- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Hatásvázlatok átalakítása
    - Az irányítási rendszer hatásvázlata a számításokhoz legalkalmasabb formára hozható
      - Tagok összevonása
      - Jelek áthelyezése
    - Soros kapcsolás

$$w = \frac{y}{u} = \frac{w_2 w_1 u}{u} = w_2 w_1$$



    - Párhuzamos kapcsolás

$$w = w_1 + w_2$$



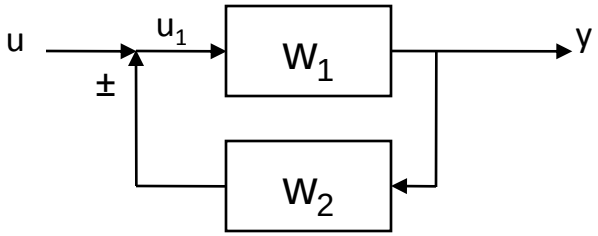
Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Hatásvázlatok átalakítása
    - Az irányítási rendszer hatásvázlata a számításokhoz legalkalmasabb formára hozható
      - Tagok összevonása
      - Jelek áthelyezése
    - Visszacsatolás

$$y = w_1 u_1 = w_1 (u \pm w_2 y)$$

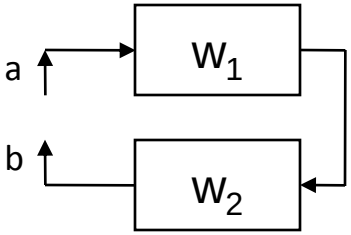
$$y = \frac{w_1}{1 \pm w_1 w_2} u$$

$$w = \frac{w_1}{1 \pm w_1 w_2} = \frac{w_1}{1 \pm w_0}$$



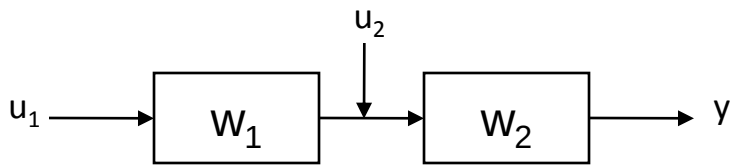
    - Felnyitott kör

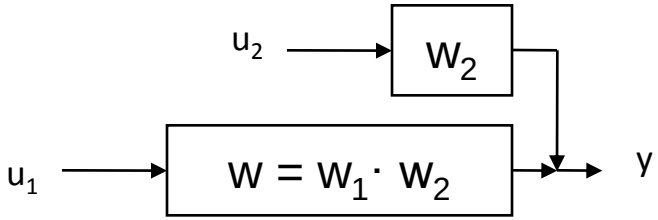
$$w = w_2 w_1$$

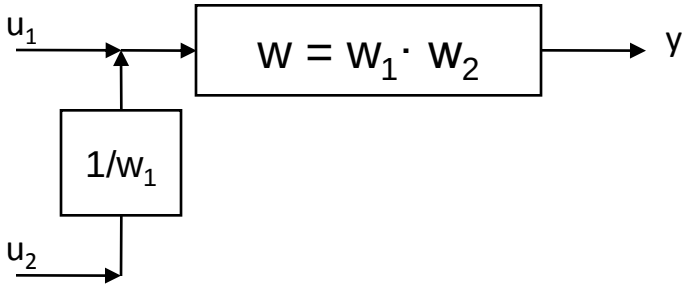


Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Hatásvázlatok átalakítása
    - Jelek áthelyezése
      - A hatáslánc valamely pontján belépő jel áthelyezhető
      - Biztosítani kell, hogy a kimenetre az eredetivel megegyező hatást fejtsen ki

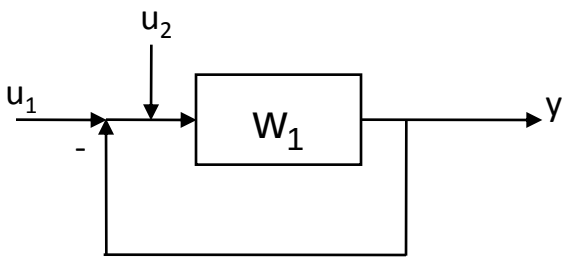


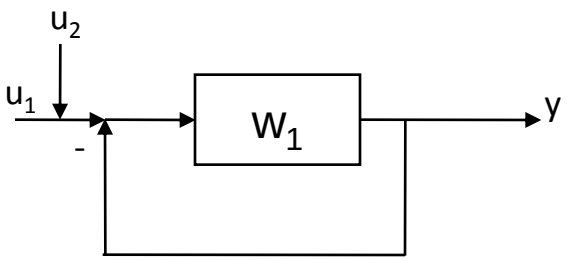


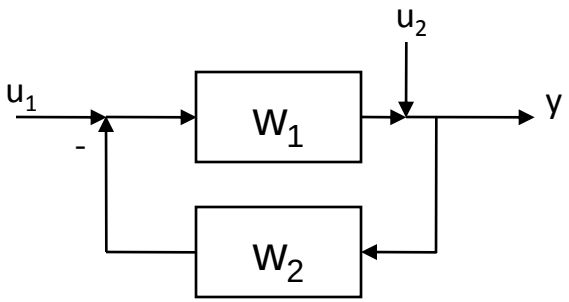


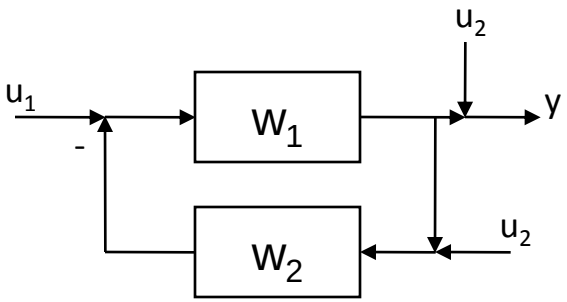
Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Hatásvázlatok átalakítása
    - Jelek áthelyezése
      - A hatáslánc valamely pontján belépő jel áthelyezhető
      - Biztosítani kell, hogy a kimenetre az eredetivel megegyező hatást fejtsen ki



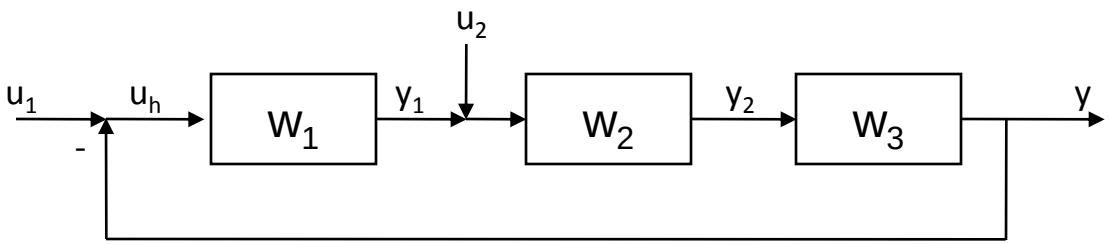






Lineáris tagok jelátvivő tulajdonságai

- Lineáris dinamikus rendszerek, folyamatok
  - Hatásvázlatok átalakítása
    - Bemenő jel és a visszacsatolt kör tetszőleges jele közötti kapcsolat



$$\frac{y_2}{u_2} = ? \qquad u_1 = 0$$

$$y_2 = w_2(u_2 + y_1) = w_2(u_2 - w_1 y) = w_2(u_2 - w_1 w_3 y_2)$$

$$\frac{y_2}{u_2} = \frac{w_2}{1 + w_1 w_2 w_3} = \frac{w_2}{1 + w_0}$$

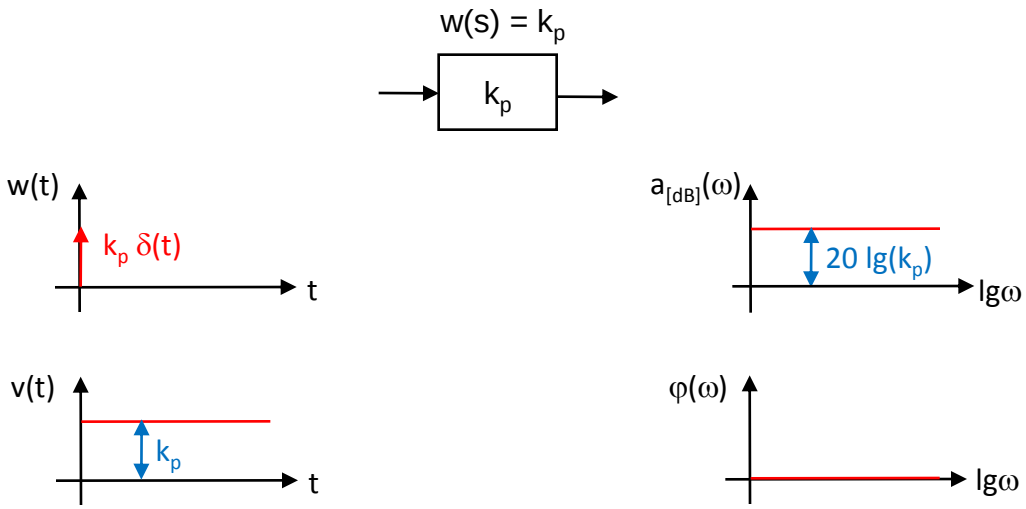
- A keresett átviteli függvényben
  - A számlálóban mindig a bemenő és keresett jel közötti átviteli függvények eredője
  - A nevezőben mindig az $1 + w_0$ kifejezés
  - w_0 a felnyitott kör átviteli függvénye

Lineáris alaptagok

- Ideális alaptagok
  - Folytonos idejű lineáris rendszer átviteli függvénye

$$w(s) = k_{zp}\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = k_{tc}\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\dots(1+s\tau_m)}{(1+sT_1)(1+sT_2)\dots(1+sT_n)}$$

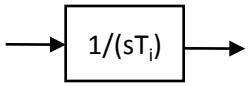
- Néhány egyszerű alaptag kombinációjából épül fel
  - Arányos (P) tag
    - » Az ideális P tag széles frekvenciasávot egyenletesen átvivő tag
    - » A valóságban nem realizálható, a valóságos szerkezetek frekvenciafüggőek

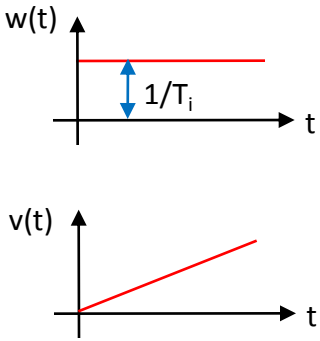


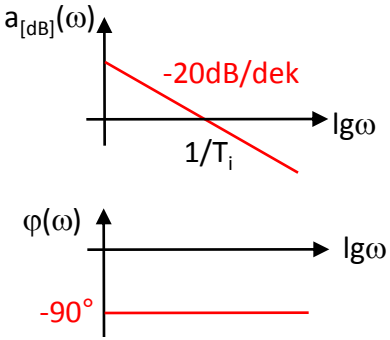
Lineáris alaptagok

- Ideális alaptagok
  - Integráló (I) tag
    - A bemenő jel integrálásával képzi a kimenő jelet
    - Ugrás alakú súlyfüggvény w(t)
    - Sebességugrás alakú átmeneti függvény v(t)
    - Pl: Kondenzátor feszültsége és árama közötti kapcsolat
    - A kis frekvenciákat kiemeli, a nagy frekvenciákat szűri

$w(s) = 1/(sT_i)$



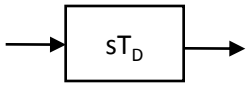


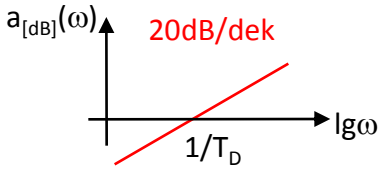


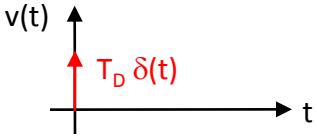
Lineáris alaptagok

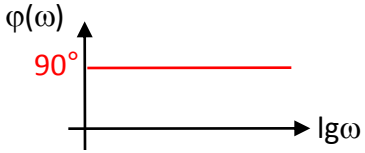
- Ideális alaptagok
  - Differenciáló (D) tag
    - A bemenő jel differenciálásával képzi a kimenő jelet
    - Súlyfüggvényének nincs értelme, a $\delta(t)$ függvény differenciálhányadosa nem értelmezhető
    - v(t) átmeneti függvénye T_D területű Dirac delta
    - Pl: Tekercs feszültsége és árama közötti kapcsolat
    - A nagy frekvenciákat kiemeli, a kis frekvenciákat szűri

$$w(s) = sT_D$$





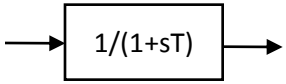


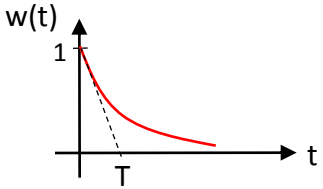


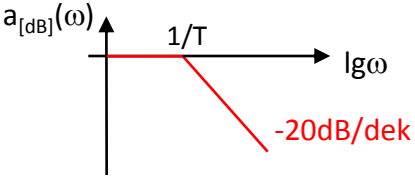
Lineáris alaptagok

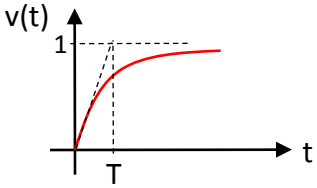
- Tárolós tagok
  - Egytárolós arányos tag
    - Az $\omega < 1/T$ tartományon arányos (P) taggal közelíthető
    - Az $\omega > 1/T$ tartományon integráló (I) taggal közelíthető
    - Tranziensek esetén először az integráló hatás érvényesül
      - A kimenő jelben először a bemenő jel integrálja jelenik meg
    - Majd hosszabb idő múlva az arányos (P) hatás érvényesül
      - A két hatás határa a T időkéséssel jellemezhető

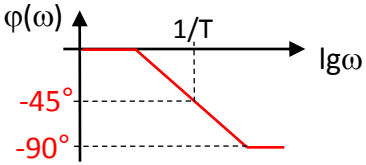
$$w(s) = 1/(1+sT)$$









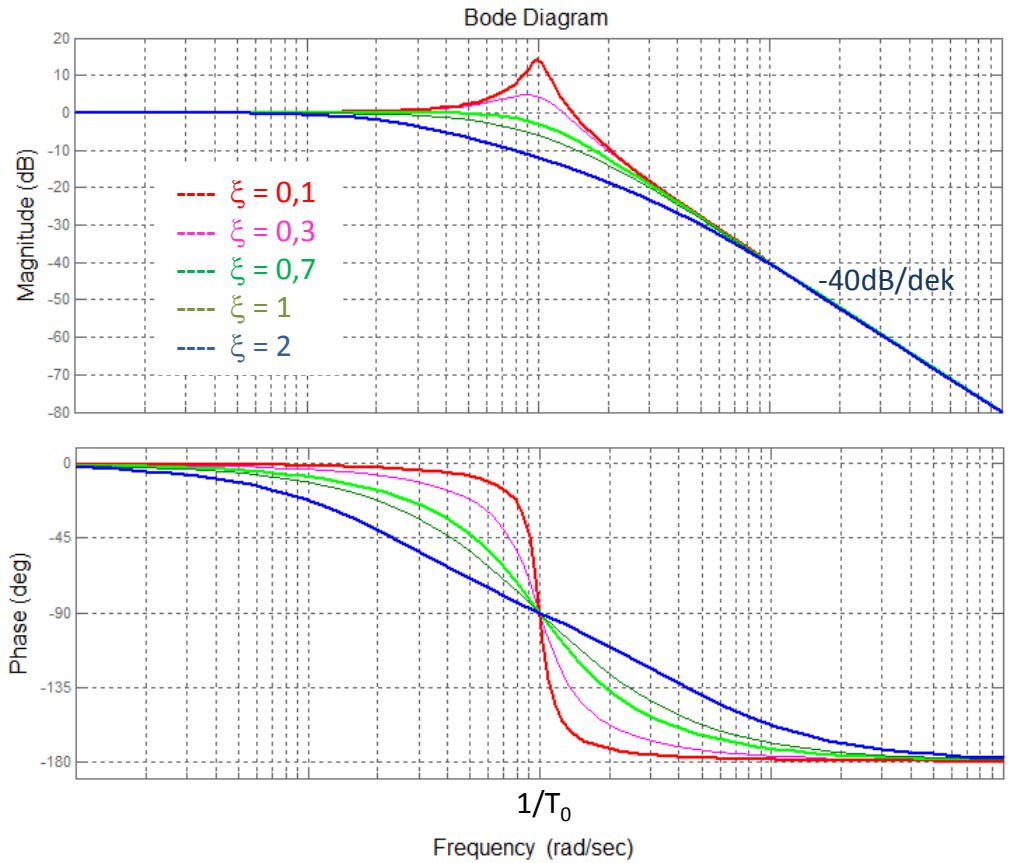


Lineáris alaptagok

- Tárolós tagok
  - Kéttárolós arányos tag

$$w(s) = \frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + s^2 T_0^2}$$

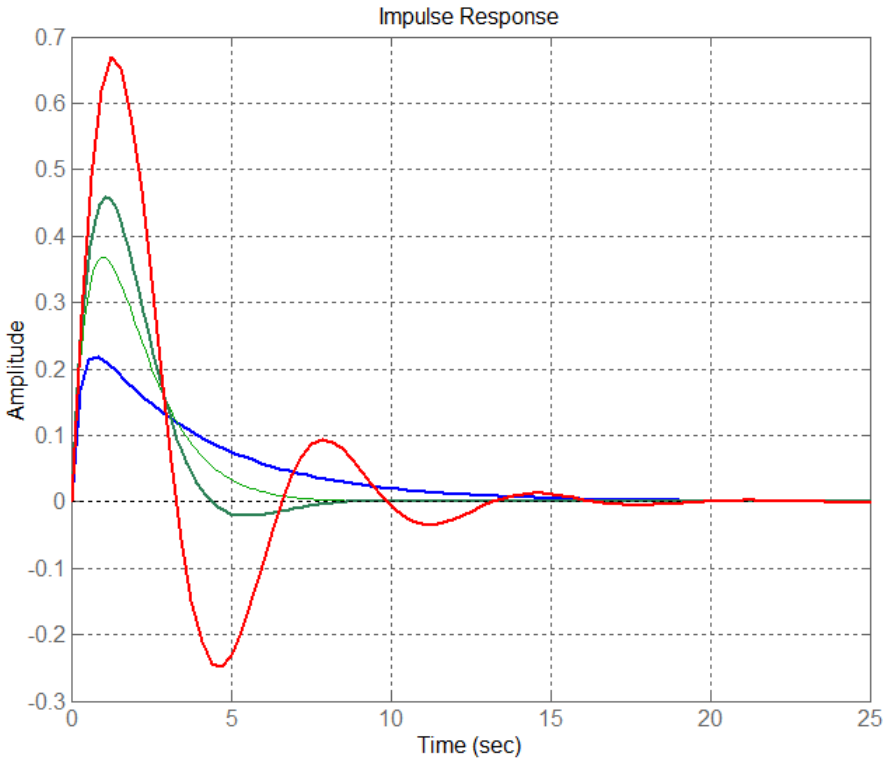
  - Az $\omega < 1/T_0$ tartományon arányos (P) taggal közelíthető
  - Az $\omega > 1/T_0$ tartományon $w(j\omega) \approx -1/(\omega^2 T_0^2)$ kétszeresen integráló taggal közelíthető
  - Az $\omega_0 = 1/T_0$ körüli frekvenciákon a frekvencia átviteli tulajdonságok a ξ csillapítási tényezőtől függenek
  - Az ω_0 vágási frekvencián
    - az amplitúdó $1/(2\xi)$
    - a fázisszög -90°

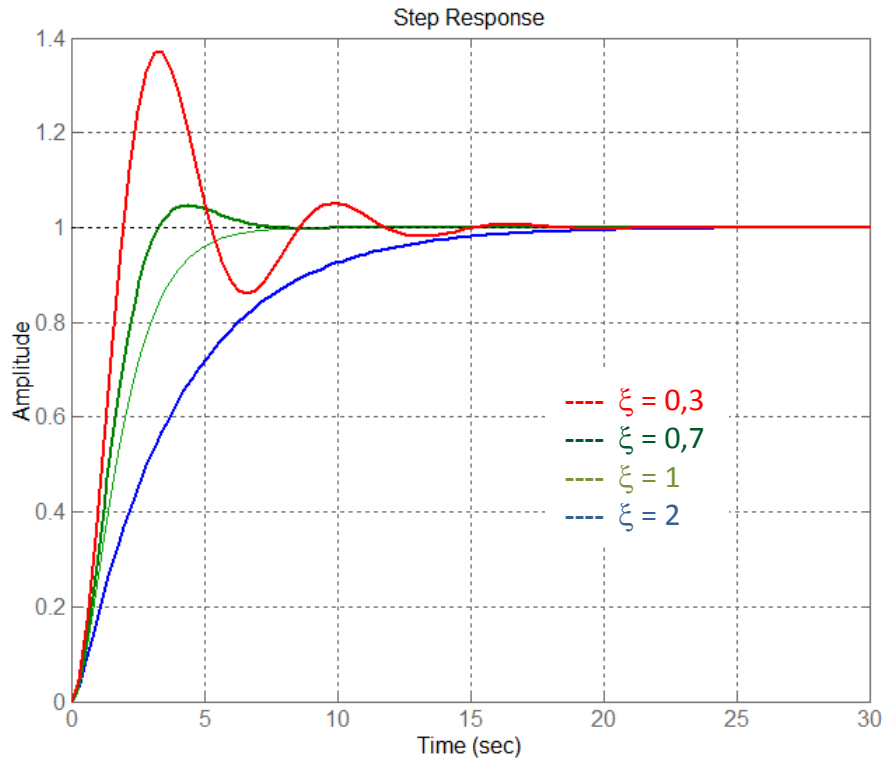


Lineáris alaptagok

- Tárolós tagok
  - Kéttárolós arányos tag
  - $\xi > 1$ esetben valós pólusok
    - aperiodikusan csillapított tag
  - $\xi < 1$ esetben komplex-konjugált pólusok
    - periodikusan csillapított vagy lengő tag $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ lengési frekvenciával

$$w(s) = \frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + s^2 T_0^2}$$

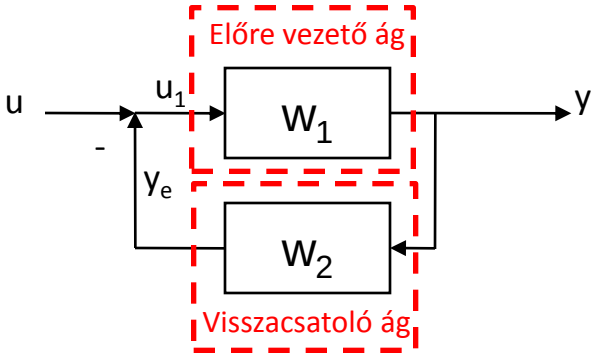




Lineáris alaptagok

- Visszacsatolt tag
  - A jelátvivő tulajdonságok befolyásolásának egyik leghatékonyabb eszköze
    - A szabályozási kör is visszacsatolás elvén épül fel

$$w = \frac{w_1}{1 + w_1 w_2} = \frac{w_1}{1 + w_0}$$



- w_0 a felnyitott kör átviteli függvénye
  - A visszacsatolt hurkot tetszőleges helyen felvágva a két végpont között mérhető
- A visszacsatolt tag $w(j\omega)$ frekvenciaátviteli függvénye közelíthető ($s = j\omega$)

$$w(s) \approx 1/w_2(s) \qquad \text{ha} \qquad |w_0(s)| >> 1$$

Ilyenkor a visszacsatolt rendszer átviteli tulajdonságait kizárólag a visszacsatoló ág határozza meg

$$w(s) \approx w_1(s) \qquad \text{ha} \qquad |w_0(s)| << 1$$

Ilyenkor a visszacsatolt rendszer átviteli tulajdonságait kizárólag az előrevezető ág határozza meg, a visszacsatolásnak másodrendű hatása van

Lineáris rendszerek stabilitása

- A lineáris rendszer mozgása
  - Nyugalmi állapot
    - Egyensúlyi állapotban valamennyi állapotváltozó mozgása megszűnik, x(t) = állandó

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

  - Saját mozgás
    - A nyugalmi helyzetéből kitérített majd (pl. a t = 0 időpontban) magára hagyott rendszer mozgása
  - Gerjesztett mozgás
    - A nyugalmi helyzetben lévő rendszerre adott bemenő jel vált ki
  - Stabilis rendszer
    - A nyugalmi helyzetéből kitérített majd magára hagyott rendszer visszatér nyugalmi helyzetébe vagy annak közeli környezetébe
  - Labilis rendszer
    - A nyugalmi helyzetéből kitérített majd magára hagyott rendszer nem tér vissza nyugalmi helyzetébe vagy annak közeli környezetébe
  - Kérdés: Hogyan mondjuk meg egy lineáris rendszerről, hogy stabilis vagy sem?

Lineáris rendszerek stabilitása

- A lineáris rendszer mozgása
  - Magára hagyott zárt szabályozási rendszer stabilis
    - Ha a tranziens mozgását leíró időfüggvény csillapodó összetevőkből áll
  - A tranziens időfüggvény exponenciális összetevők kombinációjából áll

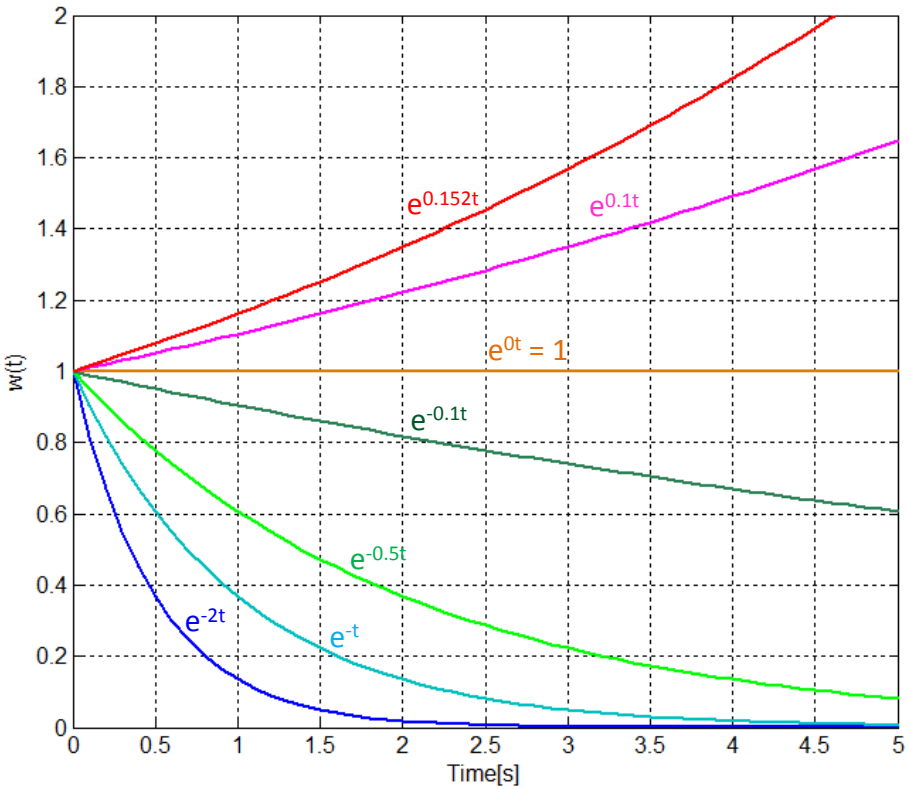
    - A kitevőben a rendszer pólusai vannak
    - Akkor csillapodó az exponenciális időfüggvény, ha a szabályozási rendszer pólusai negatív valós részűek
      - Pl:

$$w(t) = \varepsilon(t)(1{,}5e^{-4t} - 0{,}5e^{-2t})$$

  - A zárt szabályozási kör akkor stabilis, ha valamennyi pólusa negatív valós részű

$$w(s) = k_{zp}\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$\mathcal{R}e\{p_i\} < 0 \qquad i = 1\dots n$$



Lineáris rendszerek stabilitása

- Stabilitási vizsgálatok
  - A szabályzó rendszer tervezésekor
    - Sem a zárt sem a nyitott kör átviteli függvénye nem ismert pontosan
      - A szabályzót nem ismerjük előre
      - A zárt szabályozási rendszerrel szemben megfogalmazott kritériumok alapján kell kialakítani
        - » Legyen stabil
        - » Az alapjelet megfelelően kövesse
        - » A zavaró jelek hatását minimalizálja.
        - » A paraméterváltozásokra kellően érzéketlen legyen.
        - » Megfeleljen az egyéb követelményeknek
    - A zárt szabályozási kör stabilitását nem célszerű közvetlenül a zárt kör átviteli függvényéből meghatározni
      - Olyan közvetett stabilitásvizsgálati módszerek terjedtek el, amelyekkel a felnyitott kör jellemző alapján következtethetünk a zárt kör stabilitására
      - Nyquist kritérium
        - » A Nyquist diagramból
      - Bode kritérium
        - » A Bode diagramból

$$a(\omega) = \boldsymbol{abs}\big(w(j\omega)\big)$$

$$\varphi(\omega) = \boldsymbol{arc}\big(w(j\omega)\big)$$

$$a_{[dB]}(\omega) = 20\ log_{10}[a(\omega)]$$

Lineáris rendszerek stabilitása

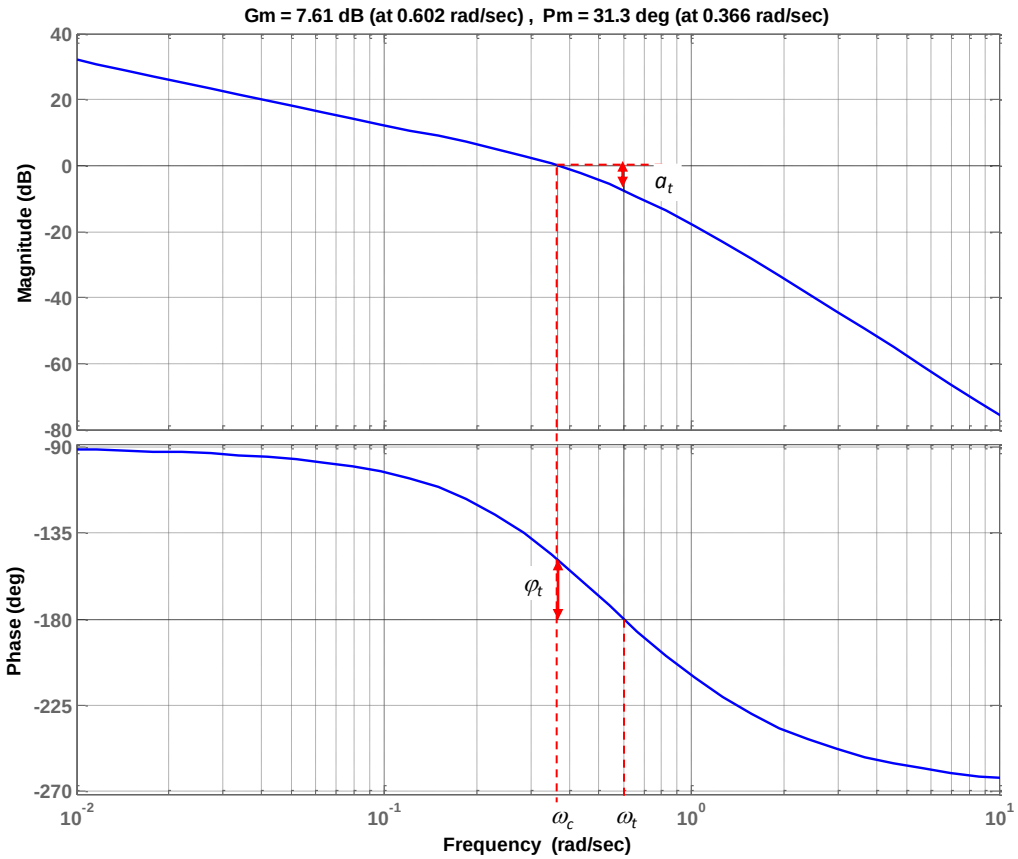
- Stabilitási vizsgálatok
  - Bode kritérium

- ω_c vágási körfrekvencia érték
  - Ahol a nyitott kör amplitúdó menete egységnyi értékű (cut-off frequency)
  - $a(\omega) = 1$ $\quad a_{[dB]}(\omega) = 0$ dB

- φ_t fázistartalék vagy fázistöbblet
  - A nyitott kör fázistolása az ω_c körfrekvencián +180°
  - $\varphi_t = \varphi(\omega_c) + 180°$

- ω_t körfrekvencia érték
  - Ahol a nyitott kör fázismenete metszi a -180°-hoz tartozó vízszintes tengelyt
  - $\varphi(\omega_t) = -180°$

- a_t erősítési tartalék
  - $a_{t[dB]} = 0\text{dB} - a_{[dB]}(\omega_t)$



Lineáris rendszerek stabilitása

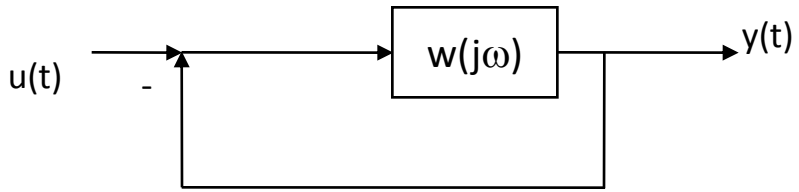
- Stabilitási vizsgálatok
  - Bode kritérium
    - Stabilis a zárt szabályozási rendszer, ha a felnyitott kör Bode diagramjában az amplitúdógörbe olyan ω_c vágási frekvencián metszi az egységnyi erősítésű tengelyt amelynél a φ_t fázistöbblet pozitív

$$\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c) > 0$$

    - Gyakorlati tapasztalat, hogy 50°-60° fázistartalékkal rendelkező rendszer üzemszerűen is megfelelő módon működik
    - A Bode diagram alapján nem csak a stabilitásra, de a stabilitási tartalékra is következtethetünk
      - Erősítési tartalék, amplitúdó többlet (gain margin)
        - » Hányszorosára lehet növelni a felnyitott kör erősítését, hogy a zárt kör a stabilitás határára kerüljön: $\varphi_t = 0$
    - Matlab:
      - `margin(sys)`

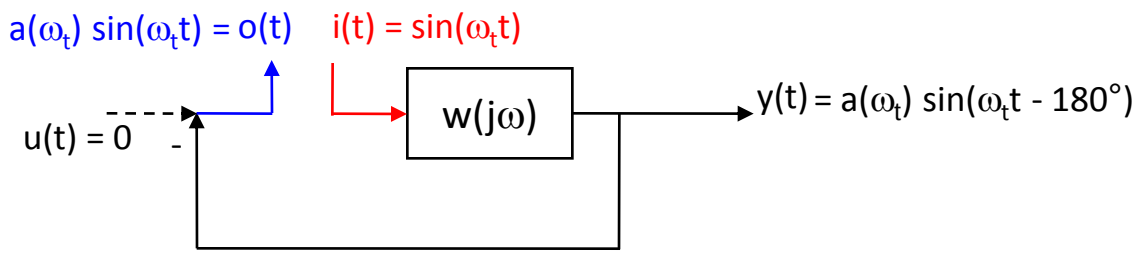
Lineáris rendszerek stabilitása

- Stabilitási vizsgálatok
  - Bode kritérium
    - Fizikai magyarázat
      - Legyen adott a stabilis w(jω) frekvencia átviteli függvényű folyamat
      - Nyissuk fel ezzel a folyamattal létrehozott zárt szabályzási kört



Lineáris rendszerek stabilitása

- Stabilitási vizsgálatok
  - Bode kritérium
    - Fizikai magyarázat
      - Legyen adott a stabilis $w(j\omega)$ frekvencia átviteli függvényű folyamat
      - Nyissuk fel ezzel a folyamattal létrehozott zárt szabályzási kört

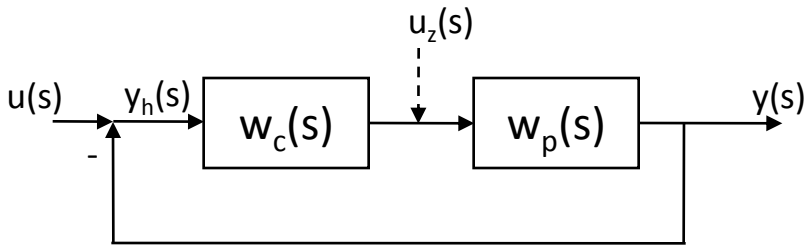


      - Az így keletkezett i(t) bemenetre adjunk ω_t körfrekvenciájú harmonikus jelet
      - ω_t -t válasszuk meg úgy, hogy az y(t) jel fázisa az i(t) bemenő jelhez képest -180° legyen
      - Az o(t) jel ennek hatására a különbségképző fázisfordítása miatt az i(t) bemenő jellel azonos fázisú lesz

      - Ha az o(t) jel $a(\omega_t)$ amplitúdója az i(t) jellel azonosan egységnyi, ha zárjuk a kört a harmonikus lengőmozgás a bemenő jel nélkül is fennmarad
        - » Az $a(\omega_t) = 1$ feltétel a stabilitás határhelyzete
      - Ha $a(\omega_t) > 1$ a kör zárásakor egyre nagyobb és nagyobb amplitúdójú jel keletkezik a zárt körben
        - » A zárt kör ekkor labilis
      - Ha $a(\omega_t) < 1$ a kör zárásakor a lengés nem tud fennmaradni, $t \to \infty$ mellet a rendszer nyugalomba kerül
        - » A zárt rendszer stabil

Szabályozási kör minőségi jellemzői

- Szabályozási hiba



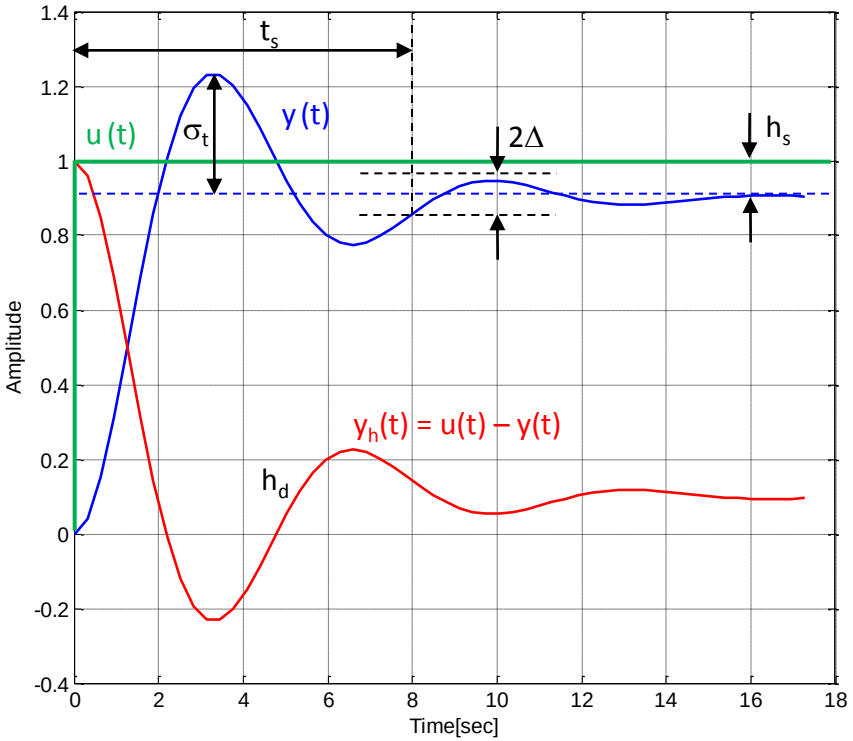
  - A szabályozás célja
    - Az u alapjel követése (követő szabályozás)
    - Az u_z zavaró jel hatásának kiküszöbölése (értéktartó szabályozás)

  - Ideális esetben
    - Az y kimenő jel a zavaró jelektől függetlenül mindig megegyezik az alapjellel ($y_h = 0$)
  - A valóságban
    - Az alapjel követése csak bizonyos hibával lehetséges
    - Az alapjel és a zavaró jelek hatására követési hiba jön létre ($y_h \neq 0$)

$$y_h(s) = \frac{1}{1 + w_0(s)} u(s) - \frac{w_p(s)}{1 + w_0(s)} u_z(s) \qquad w_0(s) = w_c(s) w_p(s)$$

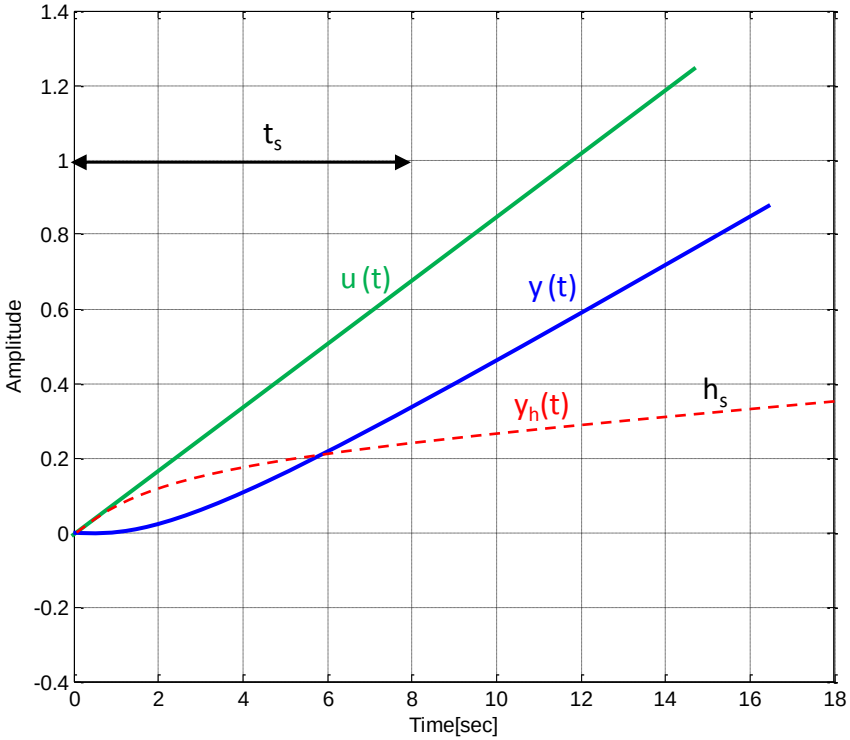
Szabályozási kör minőségi jellemzői

- Szabályozási hiba
  - Egységugrás bemenetre ($u(t) = \varepsilon(t)$) adott válaszból
    - A tranziensek lecsengését követően ($t \to \infty$) az alapjeltől való eltérés
      - A h_s statikus hiba
    - Túllendülés
      - Lengő jellegű beállás
    - Átviteli tényező
    - Beállási idő
      - A tranziensek lecsillapodtak
      - A kimenet a Δ hibasávon belül
    - Az alapjeltől való eltérés a tranziensek alatt
      - A h_d dinamikus hiba
      - A tranziensek lefolyása a szabályozás paramétereitől függ



Szabályozási kör minőségi jellemzői

- Szabályozási hiba
  - Egység-sebességugrás bemenetre adott válaszból
    - A tranziensek lecsengését követően (t → ∞)
      - A kimenet igyekszik a bemenő jellel azonos módon változni
      - A követési hiba egyre növekvő lehet

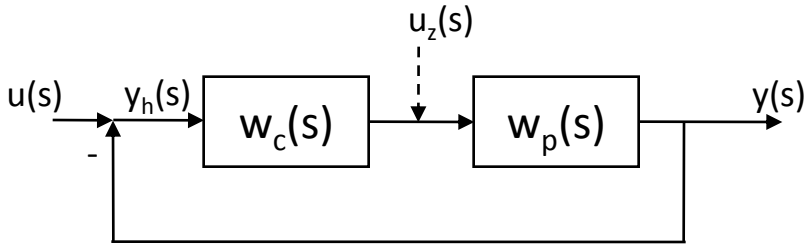


Szabályozási kör minőségi jellemzői

- A frekvencia tartományban
  - A zárt szabályzási rendszer időtartománybeli viselkedése összefügg a felnyitott kör frekvencia átviteli függvényével
    - Szabályzási idő
      - A felnyitott kör ω_c vágási frekvenciájával fordítottan arányos
        - » Szokásos esetekben: $3/\omega_c \leq ts \leq 10/\omega_c$
    - Beállási jellege
      - A felnyitott kör φ_t fázistartalékától függ
      - A stabilitás határhelyzetében $\varphi_t = 0$ a zárt rendszer csillapítatlan ($\xi = 0$) kéttárolós taggal helyettesíthető
      - $\varphi_t = 90°$ -nál a zárt rendszer aperiodikus ($\xi > 1$) kéttárolós taggal helyettesíthető
        - » Túllendülés nélkül tart az állandósult értékhez
      - Az erősen lengő beállás nem kedvező, a szabályozott folyamatok általában rosszul tűrik
      - Az aperiodikus beállásnál viszont lassúbb működés
        - » A gyakorlatba ezért a $\varphi_t = 60°$-körüli fázistartalékra törekszenek
        - » Ez kb. $\xi = 0,7$ csillapítási tényezőnek felel meg kéttárolós tag esetén

Szabályozási kör minőségi jellemzői

- Szabályozási hiba



  - Az alapjel követése csak bizonyos hibával lehetséges
  - Az alapjel és a zavaró jelek hatására követési hiba jön létre ($y_h \neq 0$)

$$y_h(s) = \frac{1}{1 + w_0(s)} u(s) - \frac{w_p(s)}{1 + w_0(s)} u_z(s) \qquad w_0(s) = w_c(s) w_p(s)$$

  - Az alapjel hatására létrejövő követési hibát vizsgálva ($u_z(s) = 0$)

$$y_h(s) = \frac{1}{1 + w_0(s)} u(s)$$

    – A követési hiba a bemenő jeltől és a felnyitott kör i típusszámától függ

$$w_0(s) = \frac{k}{s^i} \cdot w_p(s) \qquad s = 0 \qquad w_p(0) = 1$$

    – Vagyis a követési hiba attól függ, hogy a felnyitott körnek hány p = 0 pólusa van (kisfrekvenciás viselkedés)
      » i = 0 esetén az egységugrás bemeneti jelet sem tudja hiba nélkül követni
      » i = 1 esetén az egységugrás jelet hiba nélkül az egység-sebességugrás jelet hibával tudja követni
      » i = 2 esetén az egységugrás és egység-sebességugrás jelet hiba nélkül az egység-gyorsulásugrás jelet hibával tudja követni

Szabályozási kör méretezése

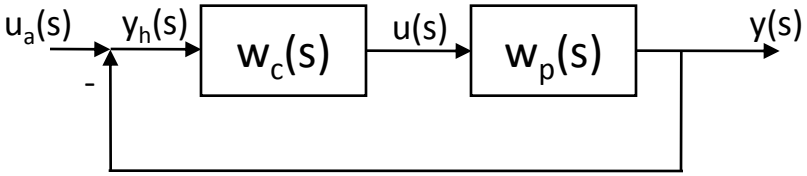
- A szabályozási kör szintézise
  - Hogyan alakítsuk ki a szabályozási rendszert hogy az megfeleljen az elvárásoknak
    - Műszaki elvárások
    - Technológiai elvárások
    - Üzembiztosság
    - Gazdaságosság stb.
  - Automatizált tervezés
    - Az előírások megadása után automatikusan meghatározza a kívánt rendszert
    - Pl:
      - A zárt kör pólusainak megadása (pole placement)
      - Különböző kritériumoknak alapján a lehetséges megoldások közül kiválasztja az optimálisat
        - » Optimális irányítások (pl: LQR, LQG)
  - Interaktív tervezés
    - A követelmények nem eléggé egzaktak vagy megalapozottak
    - A minőségi követelményeknek megfelelő szabályzó struktúrát próbálgatással keressük
    - Klasszikus módszer
    - A tervezői intuíciónak fontos szerepe van

Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - Kitűzött célok
    - A rendszer stabilis
    - A kvázistacionárius ($t \to \infty$) szabályozási hiba minimális (idálisan 0)
    - Az alapjel illetve a zavaró jel változásakor a tranziens folyamatok időtartama minimális (idálisan 0)
  - Szabályozási hiba
    - A valóságos rendszerekben általában nem tüntethető el teljesen
    - A felnyitott kör kisfrekvenciás tulajdonságainak megfelelő kialakításával minimalizálható
    - A bemenő jel típusától is függ, a leggyakoribb bemenő jelre kell felkészíteni a rendszert
  - Tranziens folyamatok időtartama
    - A dinamikus rendszerekre jellemző tehetetlenség miatt nem lehet végtelenül gyors a tranziens
    - A bemeneti jel ideiglenes megnövelésével csökkenthető
      - A beavatkozó szervek és a szabályozott folyamat is csak korlátozott bemenő jelet képes elviselni
      - A túlvezérlés káros következményekkel járhat, túlzott energia felvételt eredményezhet
    - A rendszernek lehet holtideje, ezt nem lehet megszüntetni
    - A fázistöbblettel befolyásolható a tranziensek lefolyása
      - ~60°-os fázistöbblettel várhatók a legkedvezőbb viszonyok

Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - A felnyitott kör frekvencia átviteli tulajdonságait kell jól kialakítani
    - A folyamat jelátvivő tulajdonságait általában nem tudjuk kedvezően befolyásolni
    - A feladatot a szabályzó megfelelő kialakításával kell megoldani
      - A szabályzónak jelformáló szerepe van
  - Soros kompenzáció
    - A szabályozott folyamattal sorba kapcsolt szabályzó a felnyitott kör átviteli függvényét a megkívánt alakra hozza
    - A folyamat egyes zérusainak és pólusainak hatását részben vagy egészében semlegesíti
      - Helyettük új zérusokat ill. pólusokat hoz be a rendszerbe
      - A folyamat pólusait ill. zérusait mintegy „áthelyezi”
    - Kimenetről való visszacsatolás



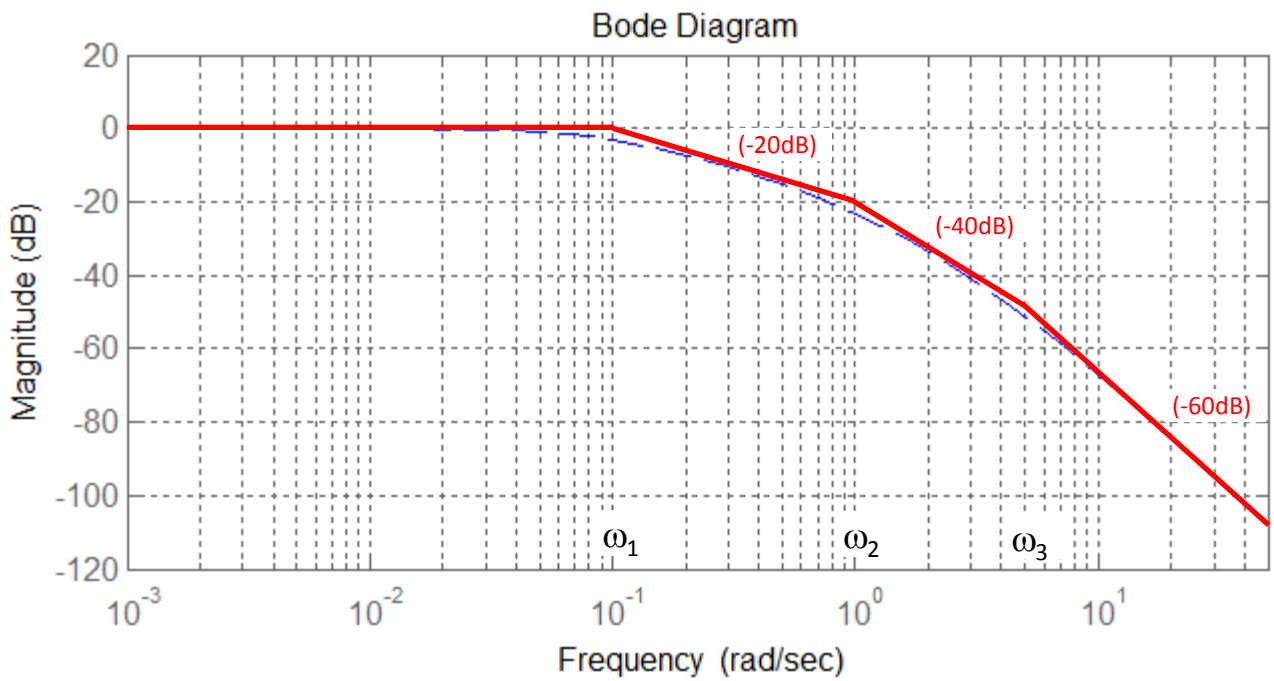
    - A tervezés idő és frekvenciatartományban egyaránt megoldható

Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - Példa

$$w_p(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)} = \frac{1}{(1+10s)(1+s)(1+0{,}2s)}$$

- Ugrás alakú alapjelre méretezzünk, $u_a(s) = 1/s$
- A periodikus tranziensek túllendülése maradjon 10% alatt
- Ez kb. ~60°-os fázistöbbletnél várható

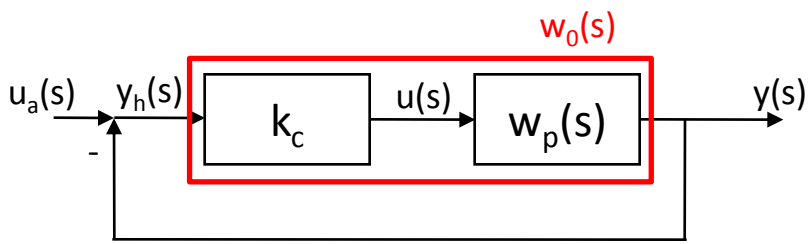


Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - P kompenzáció
    - A legegyszerűbb kompenzáló szerv
    - A felnyitott kör átviteli függvénye

$$w_0(s) = \frac{k_c}{(1+10s)(1+s)(1+0{,}2s)}$$

    - A felnyitott kör Bode diagramjában
      - A fázisgörbe nem változik
      - Az amplitúdó görbe a k_c erősítési tényezőnek megfelelően, $w_p(s)$ görbéjéhez képest eltolódik



Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - P kompenzáció

- 60°-os φ_t-re törekszünk
- Ehhez -120°-os fázisszög tartozik
- Megkeressük a hozzá tartozó ω-t
- Leolvassuk ezen az ω-án az erősítést

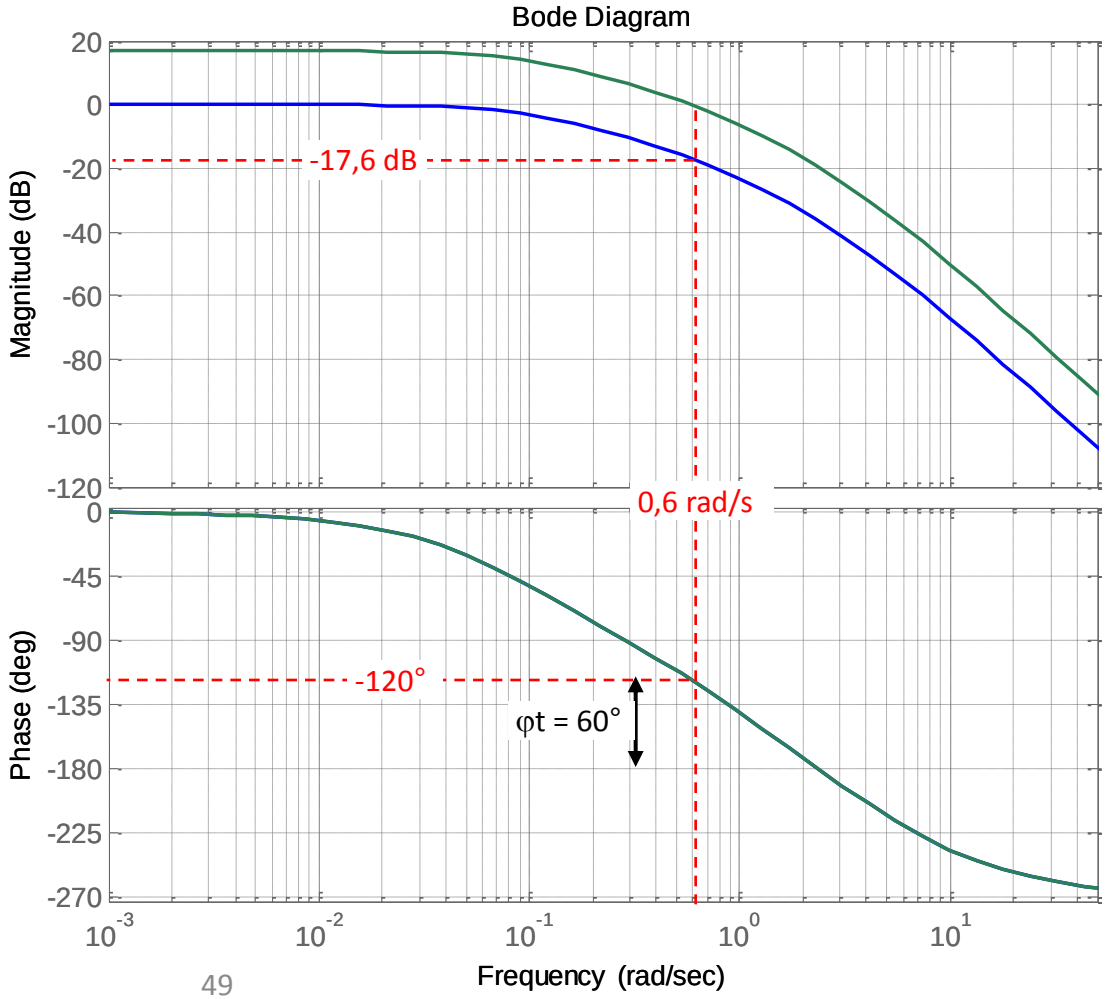
- Mivel a fázisgörbe nem változik 17,6 dB-el megnövelve a kör-erősítést az amplitúdógörbe pont ezen az ω-án fogja metszeni a 0dB-es tengelyt

$$17{,}6 = 20 \lg k_c$$

$$k_c = 10^{0.88} = 7{,}6$$

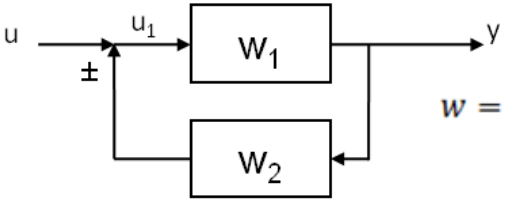
- Vagyis 60°-lesz a φ_t

$$w_0(s) = \frac{7{,}6}{(1+10s)(1+s)(1+0{,}2s)}$$



Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - P kompenzáció
    - A zárt kör átviteli függvénye



$$w = \frac{w_1}{1 \pm w_1 w_2} = \frac{w_1}{1 \pm w_0}$$

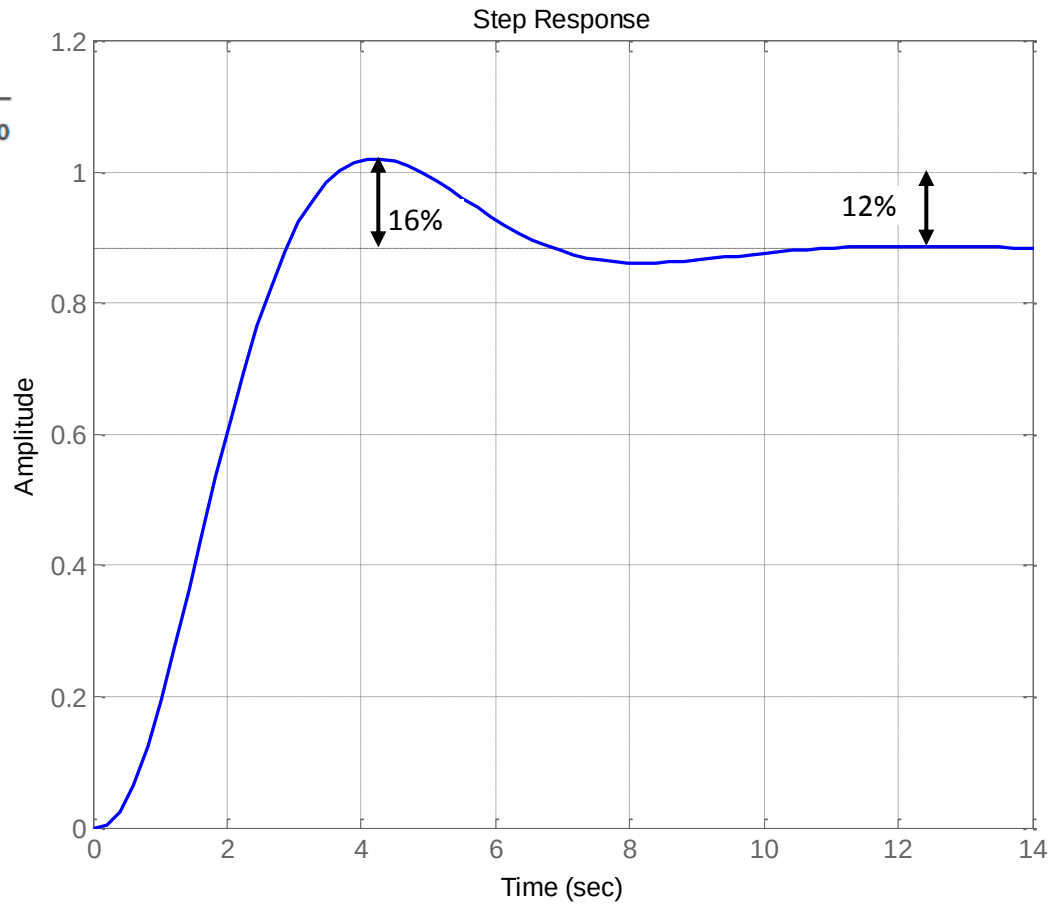
$$w(s) = \frac{7{,}6}{(1+10s)(1+s)(1+0{,}2s)+7{,}6}$$

- A zárt kör csak statikus hibával tudja követni az alapjelet

  h_s = 12 %

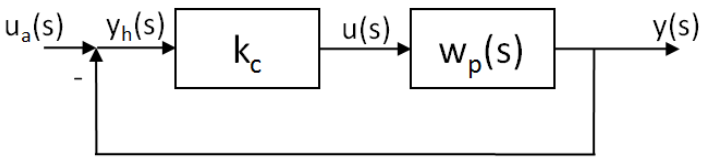
  σ_t = 16%

- A túllendülés az elvártnál nagyobb lett
- Próbálgatással tovább hangoljuk a szabályzó paramétert
- k_c = 6 értéket választva megkapjuk a kívánt kb. 10%-os túllendülést



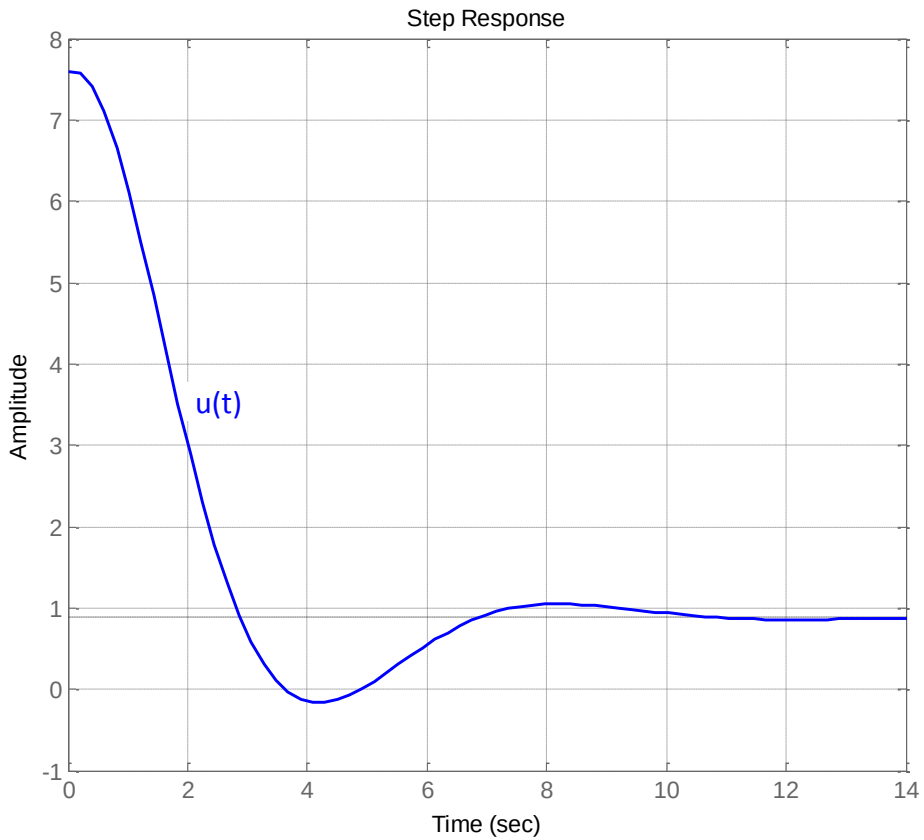
Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - P kompenzáció
    - Az irányító jel



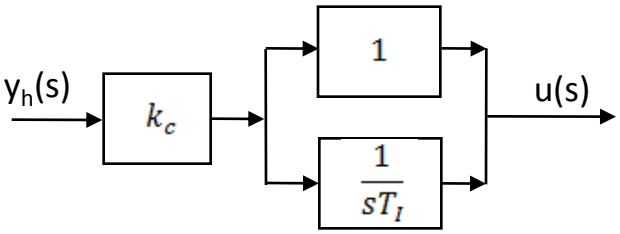
$$u(s) = 7{,}6\frac{(1+10s)(1+s)(1+0{,}2s)}{(1+10s)(1+s)(1+0{,}2s)+7{,}6}\cdot\frac{1}{s}$$

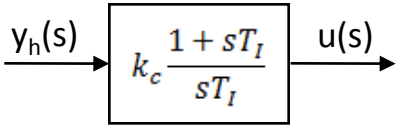
- Az u(t) irányító jel a tranziens folyamat jelentős részében meghaladja az állandósult értékét
- Ez a dinamikus túlvezérlés a rendszer gyorsításának eszköze
- A rendszer vágási frekvenciájának növelésével csökkentjük a beállási időt



Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - PI kompenzáció
    - A zárt kör statikus hibája a felnyitott kör erősítésének növelésével csökkenthető
      - A valóságos folyamatok bemenő jelét azonban nem növelhetjük minden határon túl
      - Az erősítés növelésével a rendszer instabillá válhat
    - A felnyitott kör kisfrekvenciás viselkedését integráló jellegűvé tesszük
      - A típusszámát 1-el növeljük
      - Egységugrás bemenetre a statikus hiba zérus lesz

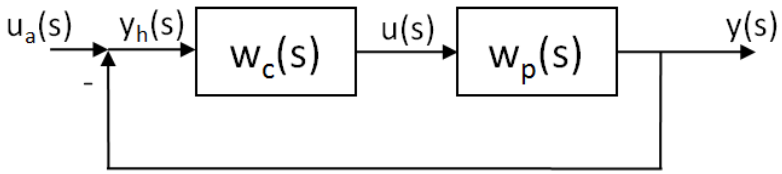




      - k_c az arányos csatorna erősítése
      - T_I az integrálási idő
        - » Egységugrás bemenő jelnél T_I elteltével a az integráló csatorna kimenete egyenlővé válik az arányos csatorna kimenetével
      - $1/T_I$-nél kisebb frekvenciákon integráló, az azoknál nagyobb frekvenciákon arányos a tag viselkedése

Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - PI kompenzáció



- A nyitott kör alacsony frekvenciás viselkedése integráló tulajdonságú lesz
- A PI kompenzációhoz hasonlóan az amplitúdó görbét függőleges irányban önmagával párhuzamosan eltolja
- A legalacsonyabb frekvenciájú sarokpontot a szabályzóval $\omega = 0$ frekvenciára helyezzük át úgy hogy a P kompenzációval beállított dinamika közel változatlan maradjon

$$\omega_1 = 1/T_I = 1/10$$

$$w_c(s) = 6 \cdot \frac{1+10s}{10s} = 0{,}6 \cdot \frac{1+10s}{s}$$

$$w_0(s) = \frac{0{,}6}{s(1+s)(1+0{,}2s)}$$

$$w(s) = \frac{w_0(s)}{1+w_0(s)} = \frac{0{,}6}{s(1+s)(1+0{,}2s)+0{,}6}$$

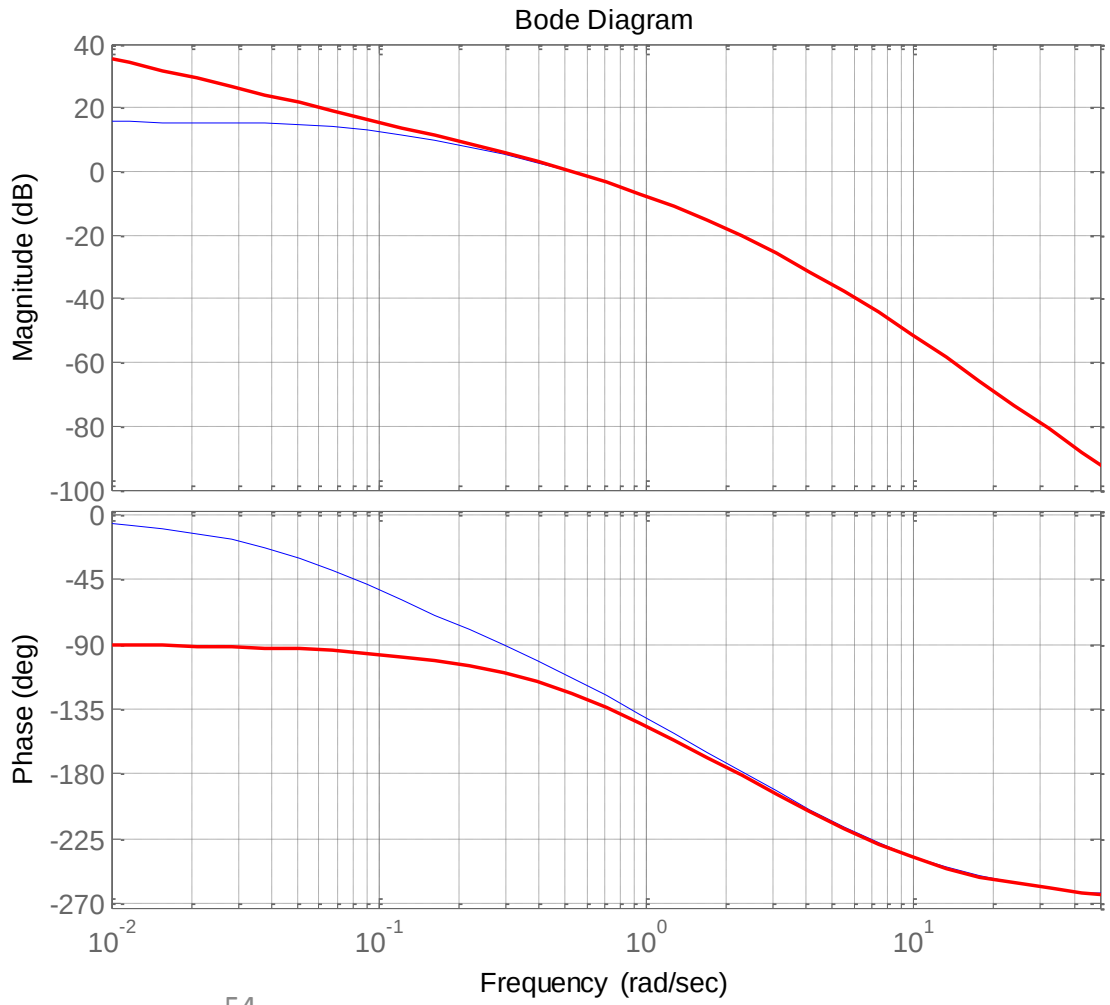
Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - PI kompenzáció

$$w_0(s) = \frac{0{,}6}{s(1+s)(1+0{,}2s)}$$

ω_c = 0,52 rad/s

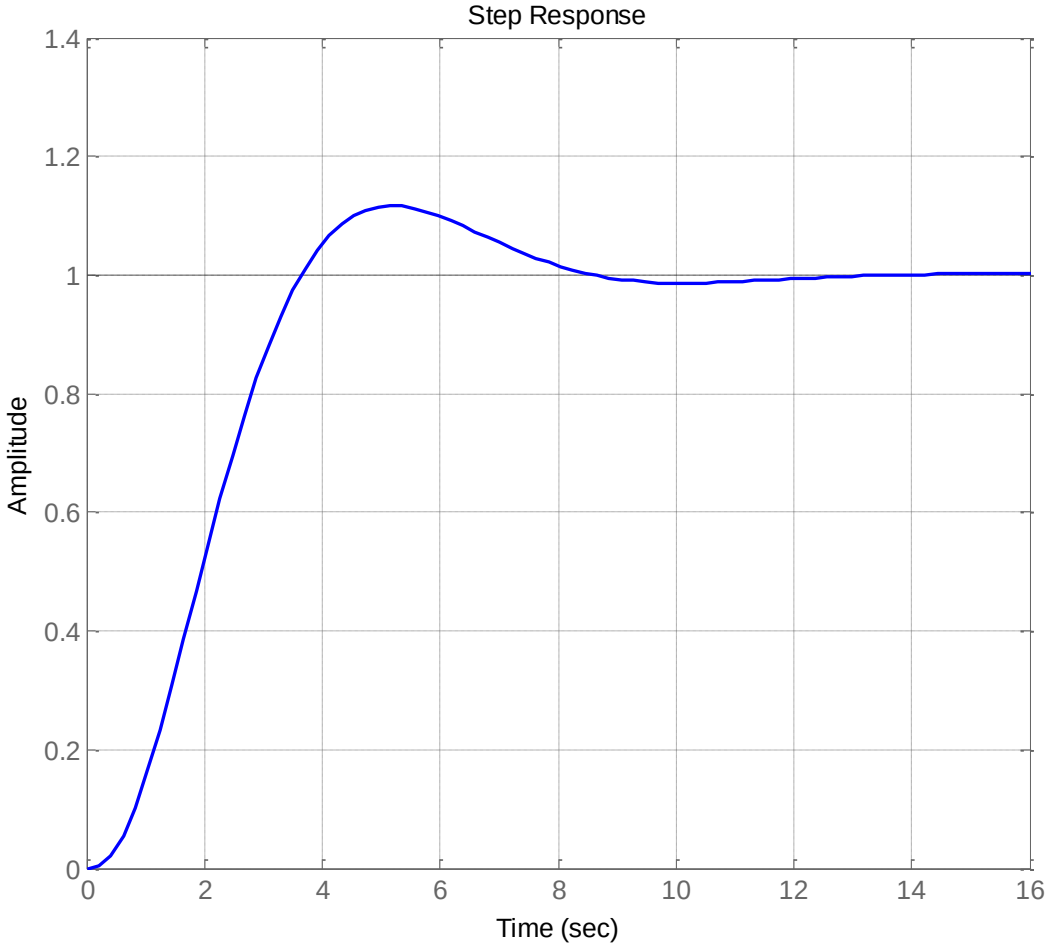
φ_t = 56,2°



Szabályozási kör méretezése

- SISO szabályzási kör méretezése
  - PI kompenzáció

$$w(s) = \frac{0{,}6}{s(1+s)(1+0{,}2s)+0{,}6}$$

$h_t = 0\ \%$

$\sigma_t = 12\%$