



Számítógépes gyakorlat MATLAB, Control System Toolbox

Bevezetés

A gyakorlatok célja az irányítási rendszerek korszerű számítógépes vizsgálati és tervezési módszereinek bemutatása, az alkalmazáshoz szükséges alapvető ismeretek átadása.

A MATLAB programcsomagban található Control System Toolbox (CST) az irányítástechnika területén hasznos függvények gyűjteménye. A gyakorlatokon lineáris és időinvariáns (LTI: Linear Time Invariant) rendszerekkel foglalkozunk, a CST az ilyen rendszerek idő- és frekvenciatartománybeli analíziséhez és szintéziséhez nyújt segítséget.

A laboratóriumi gyakorlat célja, hogy a hallgatók

- megismerjék a MATLAB CST alapvető tulajdonságait;
- elsajátítsák a legegyszerűbb utasítások használatát, a MATLAB programozás alapjait;
- átfogó képet kapjanak a CST lehetőségeiről és gyakorlati alkalmazhatóságáról;
- a megszerzett ismereteket felhasználva önállóan megoldjanak egyszerű problémákat.

Periodikus jelek leírása az időtartományban

Lineáris rendszerekre igaz, hogy a bemenetüket szinuszos jellel gerjesztve, állandósult állapotban a kimenetükön a bemenettel azonos frekvenciájú szinuszos jellel válaszolnak. Az $u(t)$ bemeneti és az $y(t)$ kimeneti szinuszos jel csak amplitúdójában és fázisában térhet el. Tehát ha

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow y(t) = Y \cos(\omega t + \theta) \quad (1)$$

Az előbbi állítás általánosítható bármilyen $\bar{U}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)}$ alakú komplex exponenciális jelre is. Mivel lineáris rendszereknél csak az amplitúdó és a fázis változik, érdemes az ezeket tartalmazó tényezőket kiemelni az exponenciális kifejezésben:

$$\bar{U}(t) = U e^{j\varphi} e^{j\omega t} \rightarrow \bar{Y}(t) = Y e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad (2)$$

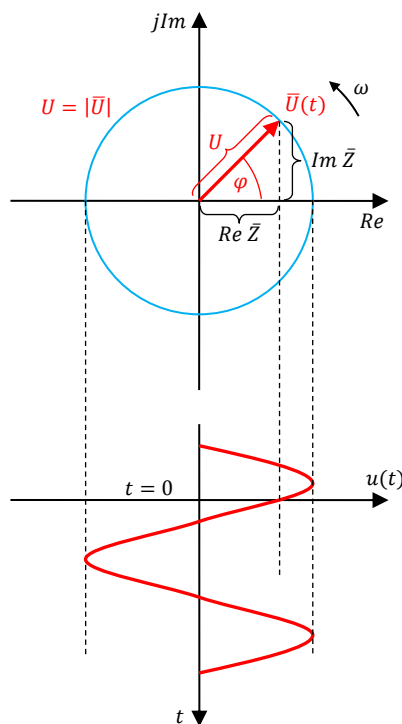
Az $\bar{U} = U e^{j\varphi}$ és az $\bar{Y} = Y e^{j\theta}$ komplex számokat a bemeneti és kimeneti jel komplex amplitúdójának nevezzük, melyek az ω frekvenciájú $e^{j\omega t}$ exponenciális jelhez tartoznak. A kimeneti és a bemeneti jel közötti kapcsolatot a komplex amplitúdók hányadosával is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(t) &= \frac{Y e^{j\theta}}{U e^{j\varphi}} U e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} \bar{U}(t) \\ \bar{Y}(t) &= \bar{W} \cdot \bar{U}(t) \end{aligned} \quad (3)$$



Látható, hogy a rendszer bemeneti jele a lineáris rendszeren áthaladva megszorozódott egy \bar{W} komplex számmal, a rendszerre az adott ω frekvencián jellemző átviteli tényezővel. Mivel különböző ω frekvenciákon az átviteli tényező más-más értéket vehet fel, a frekvenciafüggés szemléltetése céljából szokásos a $\bar{W}(j\omega)$ jelölés. Akimeneti jel tehát az átviteli tényező ismeretében bármilyen $\bar{U}(t) = Ue^{j(\omega t + \varphi)}$ alakú komplex jelre kiszámítható.

A komplex és valós időfüggvények közötti kapcsolat jól szemléltethető egy komplex forgó vektorral. A 1. ábra az $\bar{U}(t) = Ue^{j(\omega t + \varphi)}$ komplex időfüggvényt ábrázolja a valós és képzetes tengelyek által kifeszített síkon. Az $\bar{U}(t)$ jel ebben a koordinátarendszerben egy ω frekvenciával forgó, $U = |\bar{U}|$ hosszú vektor, melynek fázisszöge a $t = 0$ időpillanatban φ . Az idő előrehaladtával a vektor végpontja egyenletes sebességgel bejárja az U sugarú kört, a valós tengelyre vet vetületén kirajzolva az $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$ valós időfüggvényt.



1. ábra. Komplex forgó vektor

Az ábrából látható összefüggés az Euler formula segítségével is belátható:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x) \quad (4)$$

Az $u(t)$ időfüggvény a $\bar{U}(t)$ komplex exponenciális időfüggvény valós része:

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) &= Ue^{j(\omega t + \varphi)} = \bar{U}(j\omega)e^{j\omega t} = \text{Re}\{\bar{U}(t)\} + j\text{Im}\{\bar{U}(t)\} \\ \bar{U}(t) &= U\cos(\omega t + \varphi) + jU\sin(\omega t + \varphi) \\ u(t) &= \text{Re}\{\bar{U}(j\omega)e^{j\omega t}\} = U\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

A gyakorlatban persze nem csak exponenciális alakú jelekkel dolgozunk, az előbbi módszer azonban bizonyos megkötésekkel tetszőleges jelekre alkalmazható.



Analízis a komplex frekvenciatartományban

Mivel bármely abszolút integrálható függvény felírható szinuszos függvények szuperpozíciójaként, érdemes a lineáris rendszerek jeleit szinuszos összetevőik szerint kezelni, hiszen így a rendszer hatása az adott bemenő jelekre az előbbieket alapján egyszerűen felmérhető. Egy $f(t)$ időfüggvényű jel szinuszos összetevőkre bontását a Fourier transzformáció segítségével adhatjuk meg, ami az $f(t)$ időfüggvényhez egy körfrekvencia függő $F(j\omega)$ amplitúdósűrűség-spektrumot rendel. $F(j\omega)$ és $f(t)$ tehát ugyanannak a jelnek kétféle reprezentációja. $F(j\omega)$ az $f(t)$ időtartománybeli jel frekvenciatartománybeli megfelelője. A megfeleltetés a két tartomány között:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} \end{aligned} \quad (6)$$

A Fourier transzformáció csak abszolút integrálható jelekre alkalmazható, azaz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < K \quad K \in \mathbb{R} \quad (7)$$

ami erősen leszűkíti az alkalmazási lehetőségeket. Ez a korlátozás feloldható, ha a transzformálandó jelet konvergenciára kényszerítjük úgy, hogy egy $t \rightarrow 0$ esetén erősen nullához tartó $e^{-\sigma t}$ exponenciális függvénnyel szorozzuk, és vizsgálatunkat csupán $t \geq 0$ időtartományra terjesztjük ki. Az így nyert módosított transzformáció a Laplace transzformáció, amely az időtartománybeli jelhez annak komplex-frekvenciatartománybeli (s -tartomány) megfelelőjét rendeli. Bevezetve az $s = \sigma + j\omega$ jelölést a Laplace transzformáció összefüggései:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (8)$$

Az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (9)$$

állapotegyenletével adott lineáris rendszer megoldása az időtartományban



$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
(10)

A Fourier és Laplace transzformáció alkalmazásának legfőbb előnye, hogy a lineáris rendszerek működését leíró differenciál egyenletek a frekvenciatartományban algebrai egyenletekké egyszerűsödnek. Mivel az idő szerinti differenciálás az s-tartományban az adott jel s-el való szorzását jelenti, az időtartománybeli(10) egyenlet Laplace transzformáltja az alábbiak szerint alakul:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) + x(-0)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$
(11)

ahol $x(-0)$ az állapotváltozók kezdeti értéke. Algebrai átalakításokkal (11)-ből az állapotváltozó és kimeneti jel is kifejezhető az s-tartományban:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}[BU(s) + x(-0)]$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}[BU(s) + x(-0)] + DU(s)$$
(12)

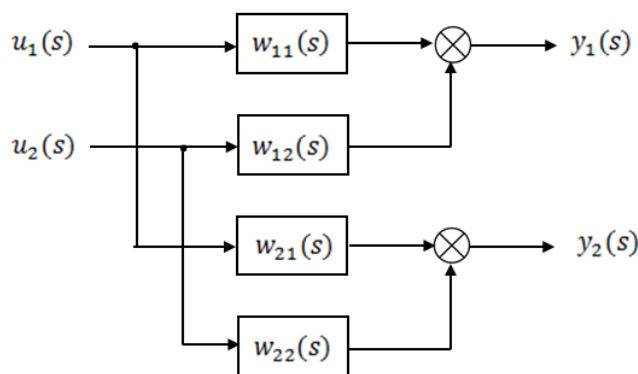
Ebből $x(-0) = 0$ kezdeti feltétel esetén kifejezhető a kimeneti és bemeneti jel közötti összefüggést megadó átviteli függvény:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$
(13)

Az átviteli függvény egy bemenetű egy kimenetű (SISO) rendszer esetén az s változó racionális törtfüggvényként adódik:

$$W(s) = \frac{b_1s^m + b_2s^{m-1} + b_3s^{m-2} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_1s^n + a_2s^{n-1} + a_3s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$
(14)

Több bemenetű és több kimenetű (MIMO) rendszernél $W(s)$ mátrix lesz, melyben a mátrix elemei (14) alakú átviteli függvények. Az egyes átviteli függvények az adott bemenet-kimenet viszonylatában jellemzik a rendszer átviteli tulajdonságait. Két bemenetű két kimenetű rendszer esetén



2. ábra. MIMO rendszer átviteli függvényei



$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} & W_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\ W_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} & W_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

A kimeneti jel ekkor az

$$Y(s) = W(s)U(s)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= W_{11}(s)U_1(s) + W_{12}(s)U_2(s) \\ Y_2(s) &= W_{21}(s)U_1(s) + W_{22}(s)U_2(s) \end{aligned}$$

A (14) átviteli függvényt a számlálóban és a nevezőben szereplő polinomok gyökeinek felhasználásával gyöktényezős alakban is megadhatjuk

$$W(s) = k_{zp} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (17)$$

ahol a z_1, z_1, \dots, z_m gyökök az átviteli függvény zérusai, a p_1, p_1, \dots, p_m gyökök pedig a pólusai. A kimeneti jel időfüggvényeit tehát az egyenlet alapján az $Y(s)$ jel inverz Laplace transzformálásával kaphatjuk meg:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad (18)$$

Az inverz Laplace transzformációhoz az $Y(s)$ racionális törtfüggvényt részlettörtekre bontjuk, majd tagonként az időtartományba transzformáljuk:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \\ &= \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_1} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} \end{aligned} \quad (19)$$

Lineáris tagok rendszerjellemező függvényei

- A tag n -ed rendű differenciálegyenlete illetve az ezzel egyenértékű állapotegyenlete:

$$\begin{aligned} a_1 y^n + a_2 y^{n-1} + a_3 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= \\ = b_1 u^m + b_2 u^{m-1} + b_3 u^{m-2} + \dots + b_{m-1} u' + b_m u \end{aligned} \quad (20)$$

ahol $y^{(n)}, y^{(m)}$ a ki- és bemenő jelek idő szerinti n - illetve m -szeres deriváltjai. Az állapotegyenlet:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (21)$$

- A tag átviteli mátrixa, SISO tag esetén átviteli függvénye:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (22)$$

- A tag súlyfüggvénye, az $u(t) = \delta(t)$ Dirac impulzus bemenetre adott $y(t) = w(t)$ válasz, zérus kezdeti feltételek esetén:
- A tag átmeneti függvénye, az $u(t) = 1(t)$ egységugrás bemenetre adott $y(t) = v(t)$ válasz, zérus kezdeti feltételek esetén:

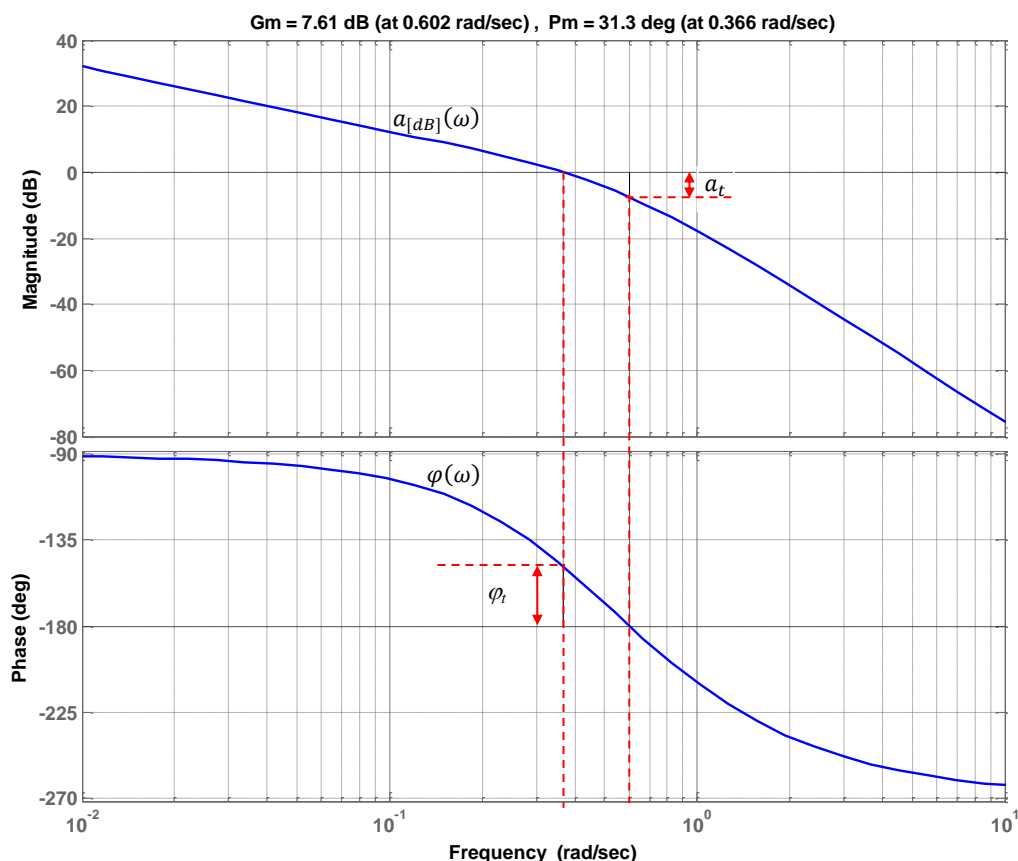
A rendszerjellemező függvények egymással egyenértékűek, egymásba átszámíthatók:

$$W(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + b_3 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + a_3 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} w(t) = dv(t)/dt$$

Egy adott rendszert jellemző n -ed rendű differenciálegyenlethez, sokféle, vele egyenértékű, n darab elsőrendű differenciálegyenletet tartalmazó állapotegyenlet rendelhető.

Irányítási rendszerek analízise a frekvenciatartományban

A frekvenciatartománybeli vizsgálatok során leggyakrabban a Bode-diagram alapján teszünk megállapításokat. A Bode-diagram a komplex átviteli függvény abszolút értékét és fázisát ábrázolja a frekvencia függvényében, az amplitúdó és a frekvencia tengelyeken logaritmikus léptékkel (3. ábra)



3. ábra. Bode-diagram



Amplitúdó menet: $a_{[dB]}(\omega) = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$

Fázismenet: $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg és hasonlítsuk össze a $W(s) = N(s)/D(s)$ átviteli függvényű tagok egységugrás válaszait és Bode diagramjait:

$$D(s) = (1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)$$

$$N_1(s) = 10$$

$$N_2(s) = 10(1 + 15s)$$

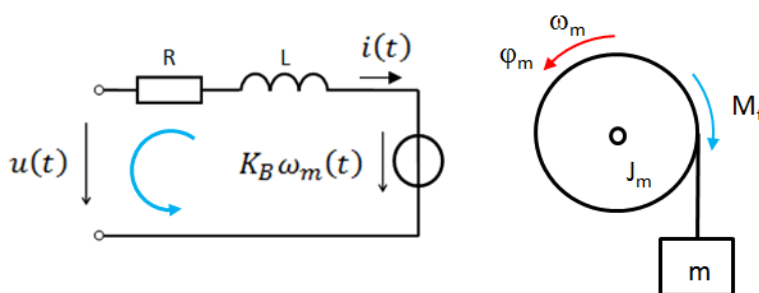
$$N_3(s) = 10(1 + 15s)(1 + 3s)$$

2. Határozzuk meg és hasonlítsuk össze a különböző ξ csillapítási tényezőjű

$$W(s) = \frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + s^2 T_0^2}$$

átviteli függvényű, kéttárolós arányos tagok egységugrás válaszait és Bode diagramjait ($T_0 = 1 \text{ rad/sec}$, $\xi = 0.3, 0.7, 1, 2$).

- 3.



4. ábra. Az egyenáramú motor villamos és mechanikai modellje

Adott az egyenáramú motor állapotegyenlete és kimeneti egyenlete az

$$x_1 \leftarrow i(t) \quad x_2 \leftarrow \omega_m(t) \quad u_1 \leftarrow u(t) \quad u_2 \leftarrow M_t(t)$$

helyettesítésekkel:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_B}{L} \\ \frac{K_T}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

a) Az alábbi motorparaméter értékekre

$$R = 1 \, \Omega; \quad L = 200 \, \mu\text{H}; \quad K_B = 2 \cdot 10^{-3} \, \text{V}/(\text{rad/s});$$

$$K_T = 2 \cdot 10^{-3} \, \text{Nm}/(\text{rad/s}); \quad B_m = 10 \cdot 10^{-7} \, \text{Nm}/(\text{rad/s}); \quad J_m = 2 \cdot 10^{-7} \, \text{Nm}/(\text{rad/s}^2);$$

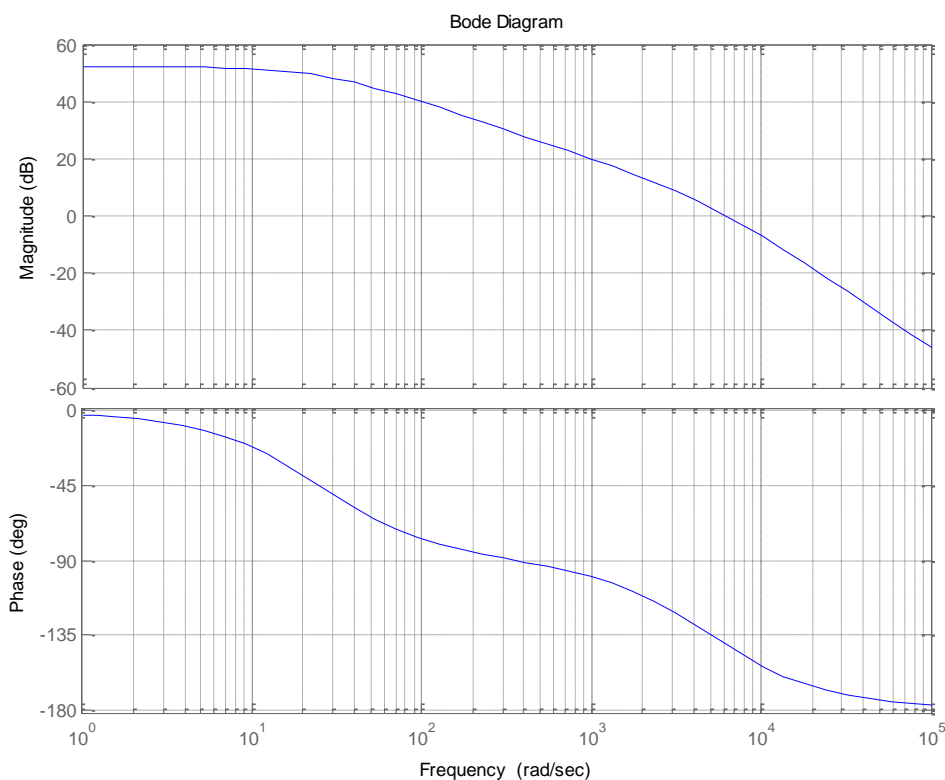
határozza meg a rendszer átviteli mátrixát.

b) Határozza meg $M_t(t) = 0 \, \text{Nm}$ esetén az $u(t) = \varepsilon(t) \cdot 1 \, \text{V}$ ugrás alakú jelre adott $i(t)$ és $\omega_m(t)$ válaszokat analitikus formában.

$$i(t) = -e^{-4979t} + 0.8e^{-25.1t} + 0.2 \, [\text{A}]$$

$$\omega_m(t) = 2.027e^{-4979t} - 402e^{-25.1t} + 400 \, [\text{rad/sec}]$$

c) Az $u(t)$ bemeneti és $\omega_m(t)$ kimeneti jel viszonylatában rajzolja fel a rendszer Bode diagramját.





Hivatkozások, felkészüléshez ajánlott irodalom

- Morócz I.: Irányítástechnika I., KKMF-1164, Budapest
- Lantos Béla: Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. Egyváltozós szabályozások. Akadémiai Kiadó, 2. kiadás, 2005, ISBN 963 05 8249 X